

QC

1613

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 403. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1931 erscheinen die Bände 8, 9, 10 u. 11 mit je 8 Heften. Der Abonnements-
preis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung
für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 13. Oktober 1931.

Inhalt

	Seite
Kurt Schneiderhan-München, Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften. III. Mitteilung Der Zusammenhang von Widerstandszunahme und Magnetisierung. (Mit 18 Figuren) . . .	385
W. Arkadiew-Moskau, Über die Permeabilität bei Hochfrequenz. Einige Bemerkungen zu den Arbeiten des Hrn. R. Michels und des Hrn. M. Wien. (Mit 4 Figuren)	406
Max Wien-Jena, Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatz von Hrn. Arkadiew	423
Max Wien-Jena, Über die Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante elektrolytischer Lösungen bei Hochfrequenz. (Mit 13 Figuren)	429
Fritz Sauter-Leipzig, Über den atomaren Photoeffekt in der K-Schale nach der relativistischen Wellenmechanik Diracs . .	454
Johann Fischer-Zürich, Über die retardierten Matrixelemente in der Theorie der Streuung und Absorption von Röntgenstrahlen	480

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

e
5
6
3
9
4
9
.
t
a
y
t
t
t
t
t

A

5.

Fer

stan
Näh
die
die
mit
auf
über
Qua

0,6
als
Mon

1930.

die v

lassu
nach
C 0,0
gena
S. 26
vaku
gut
diese

A

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1931, BAND 11, HEFT 4

Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften

III. Mitteilung

Der Zusammenhang von Widerstandszunahme und Magnetisierung

Von Kurt Schneiderhan¹⁾

(Mit 18 Figuren)

Während in der ersten Mitteilung²⁾ Messungen der Widerstandsabnahme durch longitudinale Magnetisierung in der Nähe des Curiepunktes mitgeteilt wurden, sollen im folgenden die bisher vorliegenden Ergebnisse der Untersuchungen über die Widerstandszunahme durch longitudinale Magnetisierung mitgeteilt werden. Sie enthalten unter anderem die Messungen, auf welchen die in der zweiten Mitteilung³⁾ gezogenen Schlüsse über den Zusammenhang dieser Widerstandszunahme mit dem Quadrat der Magnetisierung basieren.

1. Versuchsanordnung

Das Material, für einen Teil der Versuche Ni + etwa 0,6 Proz. Mn von der Vakuumschmelze Hanau (im folgenden als Ni I bezeichnet), für einen anderen reinstes Ni von der Mond-Nickel-Company (Ni II)⁴⁾, wurde in Drahtform von

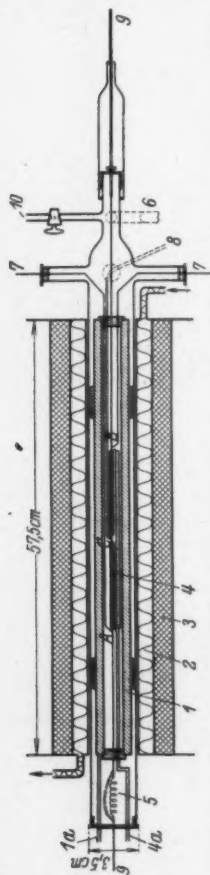
1) Münchener Dissertation.

2) W. Gerlach u. K. Schneiderhan, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 772. 1930.

3) W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 649. 1931, daselbst ist auch die wichtigste Literatur schon angegeben.

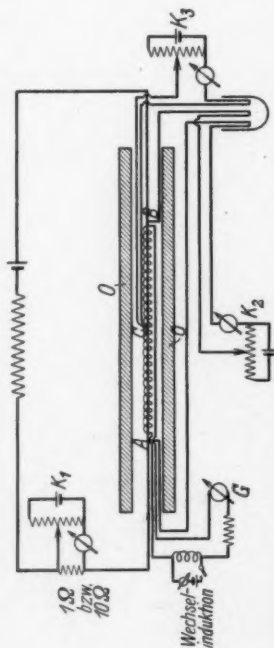
4) Wir danken den beiden Gesellschaften für die freundliche Überlassung des Materials. Der reine Draht der Mond-Nickel-Company hatte nach Angabe der Firma die folgende Zusammensetzung: Fe 0,010; C 0,015; Mg 0,003; Co 0,002; Ca 0,001; H 0,005; Ni 99,964. Das erstgenannte Material ist keineswegs — wie Borelius, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 261. 1931 es tut — als unrein zu bezeichnen. Es ist im Gegenteil eine vakuumgeschmolzene Legierung äußerst großer Reinheit mit besonders gut definierten mechanischen und magnetischen Eigenschaften. Aus diesem Grunde wurde sie gewählt.

0,42 mm (Ni I) bzw. 0,19 mm Durchmesser (Ni II) verwendet. Die Proben von Ni I waren durch Glühen im Hochvakuum künstlich gealtert; der Mond-Nickel-Draht (Ni II) war hart gezogen und wurde vor den Messungen thermisch nicht be-



1 Ofen, 1a Heizstromzuführung, 2 Wasserkühlung, 3 Magnetisierungsspule, 4 Induktionsspulen, 4a zum ballistischen Galvanometer, 5 Feder, 6 zum Manometer, 7 Potentialdrähte, 8 Thermoelement, 9 Stromzuführungen zum Meßdraht, 10 zum Vorvakuum

Fig. 1. Versuchsanordnung



K₁ Kompensationsapparat zur Messung des Meßstromes, K₂ Kompensationsapparat zur Messung des Potentialabfalles zwischen den Potentialdrähten AB, K₃ Kompensationsapparat zur Messung der Temperatur mit dem Thermoelement C, G ballistisches Galvanometer zur Messung der Magnetisierung

Fig. 2. Schaltungsakzise

handelt, um den Einfluß von Wärmeverbehandlung untersuchen zu können.

Die Anordnung für die Messung des Widerstandes, seiner Änderung im Magnetfeld, der Temperatur und der Magneti-

sierung ist in Figg. 1 und 2 dargestellt. Durch den längs des elektrischen Ofens (O) geführten Ni-Draht $A-B$ wurde ein bekannter Strom geschickt. Der Spannungsabfall längs des gesuchten Widerstandes (zur Spannungsmessung) und längs eines in Serie geschalteten Normalohms (zur Strommessung) wurde mit K_1 und K_2 , zwei Wolffschen thermokraftfreien Kompensationsapparaten nach Diesselhorst kompensiert. In A und B sind dicke Platindrähte für die Stromzuführung und dünne Pt-Drähte für die Potentialmessung möglichst punktförmig angelötet. Zur Vermeidung störender Thermokräfte wurden die Lötstellen zwischen den aus dem Ofen kommenden Potentialdrähten und den anschließenden Verbindungsdrähten in schmelzendem Eis gehalten. Der aus einem Akkumulator großer Kapazität entnommene Meßstrom lag zwischen 0,1 und 0,2 Amp.; innerhalb dieser Grenzen war er ohne Einfluß auf die magnetische Widerstandsänderung. Der Widerstand der Nickeldrähte war in den verschiedenen Anordnungen bei Zimmertemperatur 0,2–1,0 Ohm. Er wurde je nach seiner Größe auf $\pm 0,005$ bis $\pm 0,002$ Proz. gemessen. Die Bestimmung der Temperatur geschah durch ein bei C an den Meßdraht angelötetes, genau geeichtes¹⁾ Thermo-element aus Kupfer-Konstantan, dessen Spannung gegen Null Grad mit dem Kompensationsapparat K_3 kompensiert wurde. Die Absolutwerte der Temperatur sind auf einige Zehntel Grad sicher, die Temperaturkonstanz während einer Messung aber wesentlich genauer.

Besondere Sorgfalt wurde auf die Erzielung einer über längere Strecken und Zeiten konstanten Temperatur verwendet. Die Temperatur durfte sich nicht mehr als um 1 Promille während einer etwa $1\frac{1}{2}$ Stunden dauernden Messung ändern, damit nicht Schwankungen des Widerstandes durch die Temperatur die zu messende magnetische Widerstandsänderung überwogen. Zu diesem Zwecke war alles in einem Glasrohr untergebracht, das auf etwa 0,1 mm Hg evakuiert und mit einem Puffervakuum von 10 Liter verbunden war. Dicht auf diesem Glasrohr lag ein von Leitungswasser durchströmter Kühlkörper, welcher die Stromwärme der auf ihn gewickelten Magnetisierungsspule abführte. Alle aus der Spule

1) Nach den Angaben von Burgess bzw. der Reichsanstalt in den Dämpfen von Wasser, Naphthalin, Benzophenon und Schwefel.

herausragenden Teile mußten durch Watte gegen Temperaturschwankungen des Zimmers geschützt werden.

Der elektrische Ofen war aus Chromnickelband bifilar auf ein dickwandiges Kupferrohr gewickelt. Er lieferte über die 25 cm des Meßdrahtes eine bis auf $0,5^{\circ}\text{C}$ gleichmäßige Temperatur.

Die Magnetisierungsspule konnte bei einer Spulenkonstanten von 62,5 Gauss/Amp. bis 8 Amp. (500 Gauss) belastet werden.

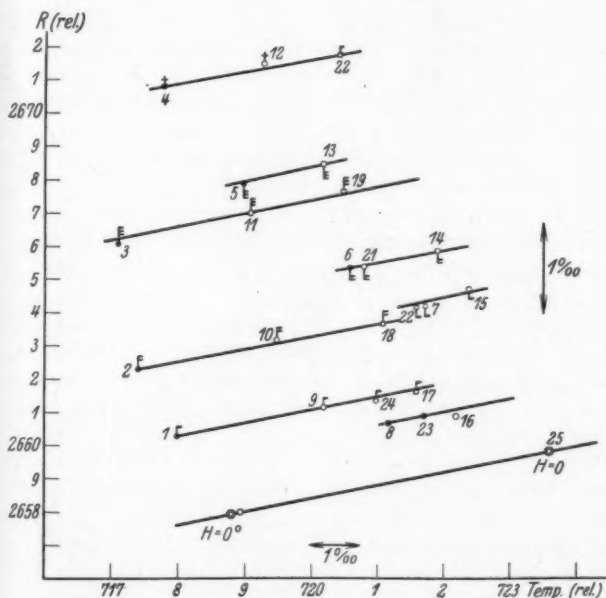
Zur ballistischen Messung der Magnetisierung dienten zwei Induktionsspulen in Kompensationsschaltung. Zwei 1,3 mm dicke, 25 cm lange Chamotteröhrchen waren mit emailliertem Kupferdraht von 0,2 mm Durchmesser doppelt bewickelt. Die eine Induktionsspule steckte über dem magnetisierten Nickeldraht, die andere lag neben ihm und war zur Kompensation des Spulenfeldes der ersten entgegen geschaltet. Da der Widerstand des ballistischen Galvanometers sehr klein war, war es nötig, die durch den Temperaturkoeffizienten der Induktionsspulen entstandene Änderung des Gesamtwiderstandes dieses Kreises zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck wurde in diesen Kreis noch eine Wechselinduktion geschaltet, so daß für jede Magnetisierungsmessung die Eichkonstante bestimmt werden konnte.

Das ganze Drahtsystem ist mit einer Feder auf der einen und einem Gewinde mit Mutter auf der anderen Seite im Glasrohr zentrisch leicht verspannt. Dadurch war die Spannung des Drahtes während einer Meßserie immer dieselbe, und eine genaue longitudinale Mittellage des Systems in dem Feld der Magnetisierungsspule gewährleistet. Die übrigen Zuleitungsdrähte zu den Meßapparaten sind durch angeblasene Glasrohre herausgeführt.

2. Methode der Messungen

Prinzipiell sind zur Messung zwei Methoden geeignet. Einmal verzichtet man auf die vollständige Temperaturkonstanz während einer Meßreihe. Dann hat man den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes in dem Variationsbereich der Temperatur für alle Feldstärken zu bestimmen und die Änderung des Widerstandes durch das Feld aus der Differenz der Kurven gleicher Felder und der Widerstands-Temperaturgeraden im unmagnetischen Zustand zu bestimmen. Oder man sucht eine solche Konstanz der Temperatur zu erzielen, daß sich die

magnetische Widerstandsänderung direkt als Differenz der Widerstände mit und ohne magnetisches Feld ermitteln läßt. Dann ist die Aufnahme der Widerstands-Temperaturkurve unnötig. Welche der beiden Methoden verwendet wurde, hing davon ab, ob durch unkontrollierbare Zufälligkeiten völlige



und absteigend (Fähnchen nach unten) gemessen, die Zahlen bedeuten die Reihenfolge der Messungen. Während der Messung schwankte die Temperatur um rund 1 Proz. Die bei den verschiedenen Temperaturen gemessenen Punkte gleichen Feldes liegen mit maximaler Abweichung von $\pm 0,0035$ Proz. auf Geraden, welche parallel zur Widerstands-Temperaturgeraden im unmagnetisierten Zustand (unterste Gerade der Figur) laufen. Die Punkte \odot waren nach sorgfältigem Entmagnetisieren zu Anfang und Ende der Versuchsreihe gemessen. Die Punkte 8, 16, 23 stellen die Widerstandsänderung durch die remanente Magnetisierung dar. *Man sieht, daß der Temperaturkoeffizient innerhalb kleiner Temperaturdifferenzen auf ± 1 Proz. unabhängig von der Magnetisierung ist.*

Bei konstanter Temperatur während einer Meßreihe wurde die Widerstandsänderung aus der Differenz des elektrischen Widerstandes nach Entmagnetisierung und mit eingeschaltetem Feld erhalten. Vor jeder Messung des Widerstandes wurde das gewünschte Feld mehrmals kommutiert¹⁾, so daß sowohl die ΔR -Werte als auch die Magnetisierung als Funktion des Feldes die sogenannte „Kommutierungskurve“ darstellen. Dabei war geprüft, daß die ΔR -Werte unabhängig von der Feldrichtung sind. Zur Bestimmung des normalen Widerstandes war eine *sehr sorgfältige Wechselstromentmagnetisierung erforderlich, denn in mehreren Fällen konnte magnetisch keine Remanenz mehr nachgewiesen werden, während der Widerstand noch merklich größer war, als im völlig entmagnetisierten Zustand.*²⁾ Nach Ausschalten des Feldes erhält man die Widerstandsremanenz. Die folgende Tab. 1 gibt ein Beispiel für eine solche Messung im Feldbereich von 4—500 Gauss bei einer Meßtemperatur von 254° C.

Die erste Spalte der Tabelle gibt das magnetisierende Feld, die zweite den Widerstand (in Ohm) im gut entmagnetisierten Zustand, die dritte den Widerstand unter Wirkung des Magnet-

1) Natürlich ausgenommen die in § 4 beschriebenen Hysteresemessungen.

2) Auf Nichterkenntnis dieser Tatsache beruhen die merkwürdigen Anomalien, die u. a. kürzlich Vilbig fand (Archiv für Elektrotechnik 22. S. 194. 1929). Richtige Hysteresekurven bei Zimmertemperatur vgl. O. Stierdtadt, Phys. Ztschr. 31. S. 561. 1930. Hierselbst auch die richtige Deutung durch nicht beachtete Remanenz, vgl. auch W. Gerlach, Ztschr. f. Phys. 59. S. 847. 1930.

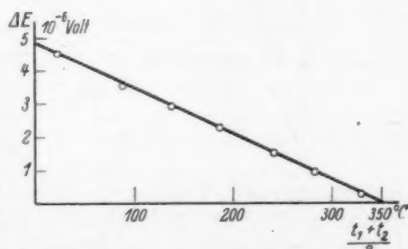
Tabelle 1

1	2	3	4	5	6	7	8
H (Gauss)	R_t (Ω)	$R + \Delta R$ (Ω)	$R_{rem.}$ (Ω)	ΔR ($10^{-5} \Omega$)	$\frac{\Delta R}{R_t} \cdot 1000$	$\Delta R_{rem.}$ ($10^{-5} \Omega$)	Temp. (M. V.)
6,25	0,52698	0,52707	0,52698	9	0,17	—	12,391
12,50	0,52699	0,52731	0,52704	32	0,61	5	12,391
31,25	0,52697	0,52776	0,52707	79	1,50	10	12,390
50,00	0,52696	0,52808	0,52706	112	2,11	10	12,390
62,50	0,52694	0,52820	0,52704	126	2,39	10	12,389
93,75	0,52693	0,52843	0,52704	150	2,85	11	12,389
125,00	0,52694	0,52854	0,52702	160	3,04	8	12,388
187,50	0,52690	0,52868	0,52701	178	3,38	11	12,388
250,00	0,52692	0,52876	0,52702	184	3,49	10	12,387
312,50	0,52693	0,52880	0,52704	187	3,55	11	12,388
375,00	0,52697	0,52885	0,52710	188	3,57	13	12,389
437,50	0,52703	0,52889	0,52713	186	3,54	10	12,392
500,00	0,52714	0,52901	0,52727	187	3,55	13	12,394

feldes. Spalte 4 gibt den „remanenten Widerstand“ nach Ausschalten des Feldes. Der Absolutwert der gesuchten Widerstandsänderung (in 10^{-5} Ohm) ist in Spalte 5 verzeichnet, die relative Widerstandsänderung in Promille in Spalte 6, in 7 als Differenz von 2 und 4 die absolute Widerstandsremanenz. Die letzte Reihe zeigt die Konstanz der Temperatur auf $\pm 0,02$ Proz.; die Zahlen sind die Spannungen des Thermoelementes in Millivolt.

Aus einem anderen Grund muß man auch für konstante Temperatur längs des Meßdrahtes Sorge tragen. Es wurde nämlich beobachtet, daß bei einem Temperaturgefälle längs

des Drahtes eine von der Stärke des longitudinalen Magnetfeldes abhängige thermomagnetische elektromotorische Kraft auftritt, welche die zur Widerstandsbestimmung ausgeführte Spannungsmessung fälscht. Diese thermomagnetische Kraft entsteht durch die verschieden starke Ma-



Elektromagnetische Thermokraft an den Enden eines Ni-Drahtes bei einem Temperaturgefälle von $t_2 - t_1 = 10^\circ \text{C}$

Fig. 4

gnetisierung von Drahtteilen verschiedener Temperatur. Ein longitudinales Feld von etwa 500 Gauss über einem künstlich hergestellten Temperaturgefälle von 10° längs des Drahtes (durch Zusatzwicklung über der einen Ofenhälfte) gab bei den verschiedenen „mittleren Temperaturen“ $\frac{t_1 + t_2}{2}$ elektromotorische Kräfte bis zu 5×10^{-6} Volt. In Fig. 4 ist die mittlere Temperatur als Abszisse, die elektromotorische Kraft bei Sättigungsmagnetisierung als Ordinate aufgetragen.¹⁾

3. Feld- und Temperaturabhängigkeit der Widerstandszunahme

Der Diskussion werden im allgemeinen die Absolutwerte der Widerstandsänderung ΔR (bzw. $\Delta R/R_s$) und nicht die pro-

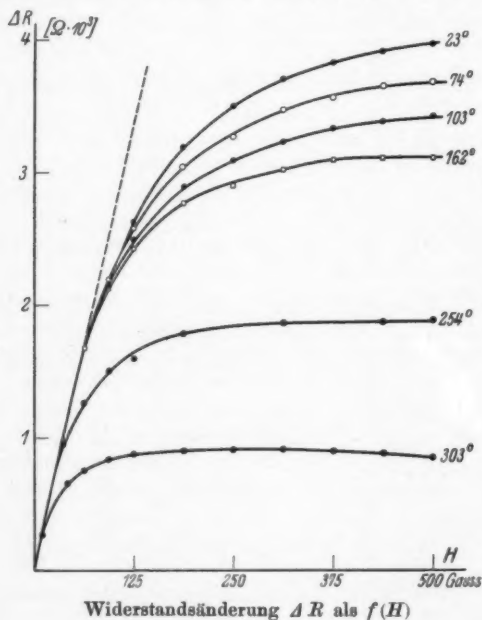
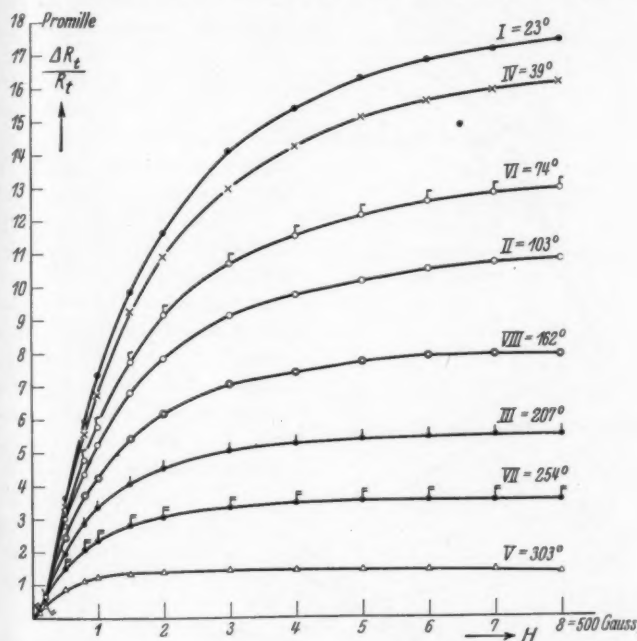


Fig. 5 a

1) W. Gerlach, Proc. London Phys. Soc. **42** (5) S. 418. 1930. Diese Untersuchungen wurden z. T. gemeinsam mit Hrn. Broili ausgeführt, welcher hierüber noch berichten wird, vgl. auch H. Broili, Münchener Diss. 1931, erscheint in den Ann. d. Phys.

zentualen Änderungen $\Delta R/R_t$ zugrunde gelegt. Denn durch Division mit R_t wird für die Betrachtung des Temperaturverlaufes nochmals eine von der Temperatur bzw. von dem



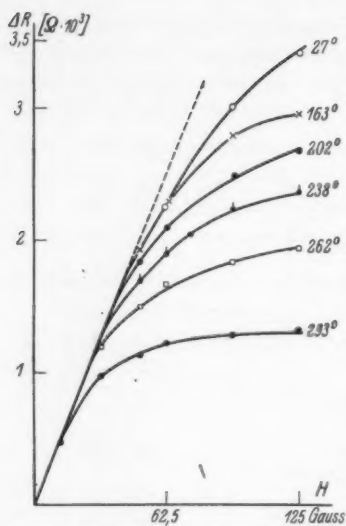
Prozentuale Widerstandsänderung $\frac{\Delta R_t}{R_t}$ als $f(H)$.

(Die römischen Zahlen geben die Reihenfolge der Messungen)

Fig. 5b

Quadrat der Magnetisierung abhängige Größe mit in Rechnung gebracht.

Als Funktion des magnetisierenden Feldes und der Temperatur hat ΔR zunächst den Charakter einer Magnetisierungskurve: Sättigung bei hinreichender Feldstärke und Abnahme der Sättigung mit steigender Temperatur. Figg. 5a und 5b zeigen eine solche Schar (5a ΔR , 5b $\Delta R/R_t$, Material: ausgeglühtes Ni I). Bei Temperaturen unter 100° ist mit dem größten Feld (500 Gauss) meist noch keine völlige Sättigung



Anfängliche Widerstandszunahme: NiI

Fig. 6a

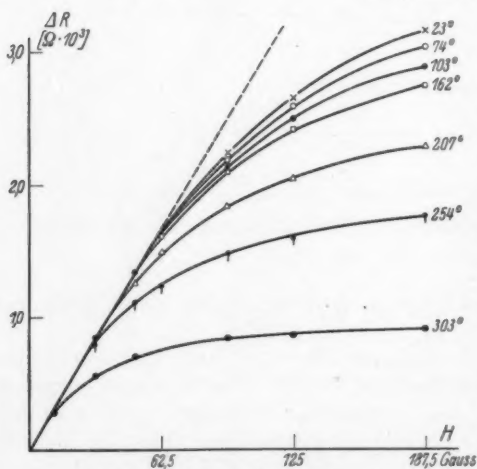
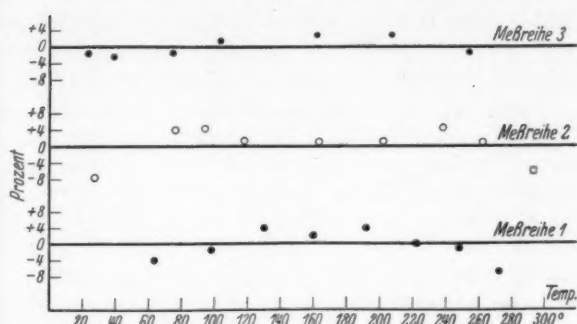
Anfängliche Widerstandszunahme
NiI schwach gegläht

Fig. 6b

erzielt. In allen Fällen fiel aber Sättigung der Magnetisierung mit Sättigung der Widerstandszunahme zusammen. Mit Annäherung an den Curiepunkt beginnt schon die Widerstandsabnahme. Bei der Kurve für 303° C in Fig. 5 ist die Neigung der Sättigungsgeraden gegen die Abszisse deutlich bemerkbar.

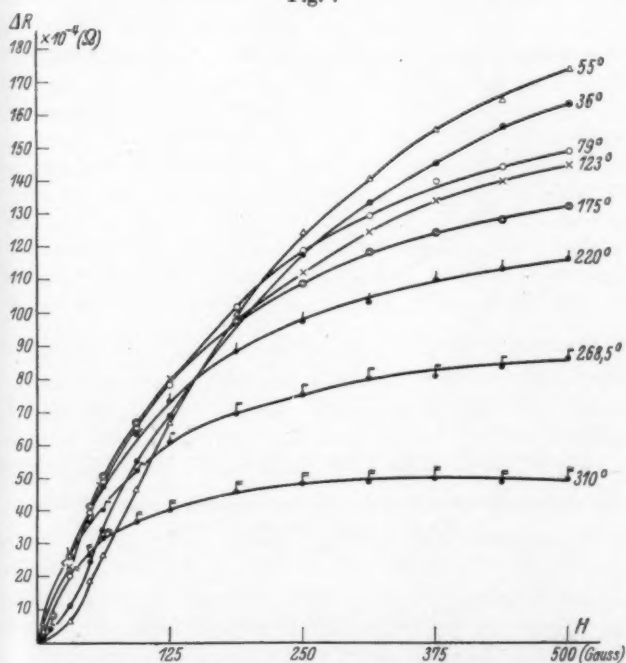
Diese Sättigungskurve zerfällt in zwei deutlich getrennte Teile: in einen kurzen, merklich linearen Anstieg über einen Feldbereich, innerhalb dessen nur ein kleiner Teil (etwa $\frac{1}{10}$) der gesamten Widerstandszunahme, aber der größte Teil der Magnetisierung (vgl. § 5) erfolgt, und in den zur Sättigung führenden, gekrümmten Kurventeil.

a) *Anfangsrichtung.* Bei kleinen Feldstärken sind die $\Delta R, H$ -Kurven sehr angenähert linear und haben eine nahezu temperaturabhängige Anfangsneigung. Figg. 6a und b zeigen dies für eine weiche und



Abweichungen der Einzelwerte von einer temperaturunabhängigen Funktion $\Delta R = C \cdot H$ für kleine Felder

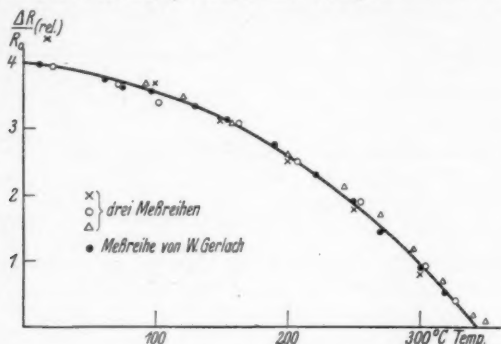
Fig. 7



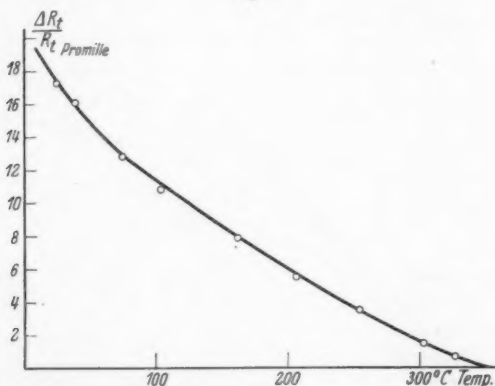
Widerstandszunahme eines sehr harten Ni II-Drahtes

Fig. 8

eine mäßig harte Probe von Ni I. Diese anfängliche Linearität zwischen ΔR und H erstreckt sich bis zu um so größeren ΔR - bzw. Feldwerten, je tiefer die Temperatur ist: z. B. bei



Temperaturänderung der maximalen (gesättigten) Widerstandszunahme
Fig. 9



Temperaturabhängigkeit der prozentualen Widerstandsänderung
für $H = 500$ Gauss als f (Temp.)
Fig. 10

Zimmertemperatur bis 67,5 Gauss, bei 303° bis etwa 15 Gauss. Fig. 7 zeigt in den prozentualen Abweichungen der Anfangsneigung von dem Mittelwert als Funktion der Temperatur die Temperaturunabhängigkeit der Anfangsneigung. Die Messungen waren reversibel.

Bei dem extrem harten Draht (Ni II) verschwindet die Temperaturunabhängigkeit der anfänglichen Widerstandszunahme (Fig. 8). Immerhin verlaufen die $\Delta R, H$ -Kurven bei kleinen Feldern noch sehr ähnlich, was besonders beim Vergleich mit der Magnetisierung auffällt. Die Messungen sind nicht mehr reversibel, jede Temperaturerhöhung ändert die Anfangsneigung bei niedriger Temperatur, sowie die maximale Widerstandsänderung [vgl. die Überschneidung der Kurven von 36° (vor) und 55° (nach Erhitzung)].

b) *Sättigung.* Der Temperaturverlauf der gesättigten ΔR -Werte ist nicht *genau* anzugeben, weil, wie bemerkt, mit den anwendbaren Feldern bei Temperaturen unter 100° C vollständige Sättigung nicht erreicht wurde. Fig. 9 bringt die

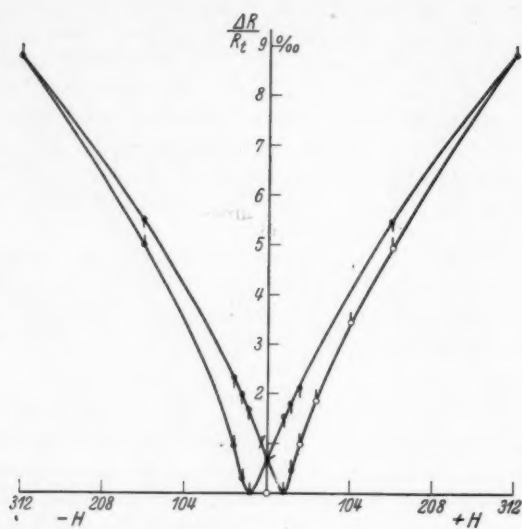
gemessenen Höchstwerte $\frac{\Delta R_{\max}}{R_0}$ (die Sättigungswerte unterhalb 100° C liegen höchstens um einige Prozent höher) der absoluten magnetischen Widerstandsänderung (in willkürlichem Maßstabe, so daß bei 160° die Ordinaten gleich sind) als Funktion der Temperatur. Die Figur enthält drei Meßreihen mit verschiedenen Nickelproben von Ni I ($\times \odot \Delta$) und eine mit ganz anderer Methode von Prof. Gerlach 1929 ausgeführte Meßreihe. Man hat es hier offenbar mit einer ganz generellen Funktion zu tun, welche der Funktion $\sigma^2 = f(T)$, also der Abhängigkeit der spontanen Magnetisierung (die praktisch gleich der Sättigungsmagnetisierung ist) von der Temperatur mindestens sehr ähnlich, wenn nicht ganz gleich ist. Die

Absolutwerte $\frac{\Delta R_{\max}}{R_0 \cdot 100}$ (ΔR_{\max} bei 0° C, R_0 der Widerstand bei 0° C) sind nicht ganz gleich; sie betragen für die drei Ni I-Proben 2,4 bzw. 2,3 bzw. 1,95 Proz. Es ist wahrscheinlich, daß die Differenz der Absolutwerte auf verschieden starker Spannung der Drähte beruht; diese Frage wird noch untersucht.

$\frac{\Delta R_{\max}}{R_t}$ als Funktion der Temperatur ist natürlich ganz anders geartet: sie verläuft gerade mit entgegengesetzter Krümmung wie $\Delta R/R_0$ als $f(t)$ (Fig. 10).

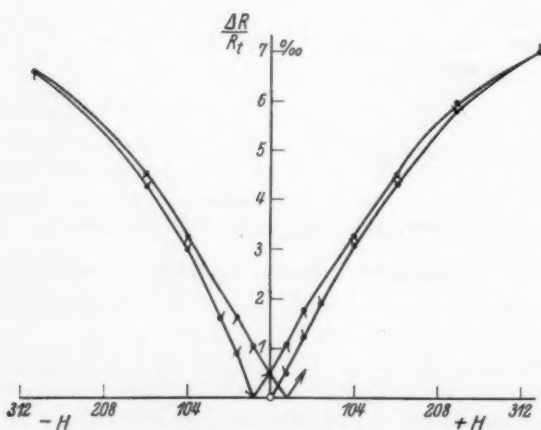
4. Hysterese und Remanenz

Die magnetische Widerstandsänderung zeigt ebenso wie die Magnetisierung Hysterese (Remanenz und Koerzitivkraft) (vgl. Fig. 3). Figg. 11—13 zeigen die Messungen der Hysterese



Hysteresekurve bei 30° C

Fig. 11



Hysteresekurve bei 100° C

Fig. 12

als Funktion der Temperatur. Die Breite der Kurven ist natürlich materialabhängig.

Mit anderen Drähten wurde nicht mehr die ganze Hystereseschleife aufgenommen, sondern nur die Widerstandsremanenz als Funktion der Temperatur bestimmt; und zwar wurde sowohl die „Sättigungsremanenz“ (d. h. nach vorhergehender Sättigungsmagnetisierung) als auch die Remanenz als Funktion der Vormagnetisierung aufgenommen (Beispiel vgl. in Tab. 1, Vertikalspalte 7). In

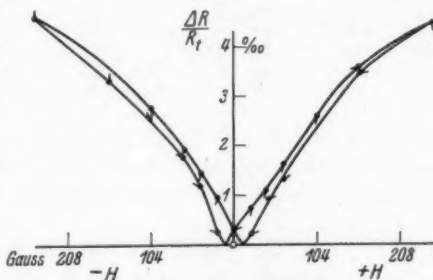
der folgenden Tab. 2 ist die Sättigungsremanenz der Magnetisierung und der

Widerstandsänderung für eine weiche Probe des Ni I angegeben (mit Rücksicht auf die Diskussion im folgenden Kapitel auch die Quadrate der magnetischen Remanenz).

Die Remanenzwerte sind (wenn auch, wie betont, unter 100° C keine volle Sättigung erreicht war) Maximalwerte, da diese schon nach einer wesentlich unterhalb der Sättigung liegenden Magnetisierung erreicht werden. Auch sind die Werte nicht auf die — ebenfalls kleine — Entmagnetisierung korrigiert, welche doch aller Wahrscheinlichkeit nach die magnetische Remanenz in gleicher Weise herabsetzt, wie die Widerstandsremanenz.

Die Remanenz zeigt — vgl. Tab. 2, Spalte 4, 5 bzw. 8 — in beiden Erscheinungen etwa die gleiche Temperaturabhängigkeit wie die Sättigung, so daß die prozentischen Werte angenähert temperaturunabhängig sind. Die Werte für die Widerstandsremanenz bei 254° und 303° sind natürlich wegen ihrer Kleinheit (~ 0,02 Proz. des Widerstandes) unsicher.

Das Ergebnis dieser Messungen ist, daß die prozentuale Widerstandsremanenz des untersuchten Materials wesentlich kleiner als die prozentuale Remanenz der Magnetisierung und des Quadrats der Magnetisierung ist. Die Abhängigkeit der



Hysteresekurve bei 200° C

Fig. 13

Tabelle 2

t° C	Magnetisierung				Widerstandsänderung		
	Sättigung	Re-	$\frac{J_{\text{rem. } \infty}}{J_{\infty}}$	$\frac{J_{\text{rem. } \infty}^2}{J_{\infty}^2}$	Sättigung	Re-	$\frac{\Delta R_{\text{rem. } \infty}}{\Delta R_{\infty}}$
	J_{∞} (rel.)	manenz $J_{\text{rem. } \infty}$	in %	in %	ΔR_{∞} $\times 10^5 \Omega$	manenz $\Delta R_{\text{rem. } \infty}$	in %
23	115	55	48	23	> 396	30	7,6
39	112	53	47	22	> 395	27,5	7,0
74	111	53	47	23	> 368	25,5	6,9
103	108	54	50	25	> 342	24,5	7,2
162	100	49	49	24	310	20	6,4 ₅
207	93	46	49	24	250	16	6,4 ₆
254	81,5	43	53	28	187	10	5,3 ₃
303	62	32	52	27	91	4,5	4,9 ₆

Widerstandsremanenz nach vorhergegangener Sättigung von der Temperatur ist sehr ähnlich der Temperaturabhängigkeit der maximalen Widerstandsänderung.

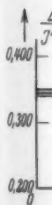
5. Magnetisierungsabhängigkeit

Die Tatsache, daß sowohl die Magnetisierung wie die magnetische Widerstandszunahme bei gleichen Feldern Sättigung zeigen, läßt vermuten, daß zwischen beiden Größen ein direkter Zusammenhang besteht.

Eine Proportionalität mit der Magnetisierung kommt nicht in Betracht, da, wie schon oben betont, die ganz charakteristische Beziehung die ist, daß die magnetische Widerstandszunahme erst dann groß wird, wenn die Magnetisierung bereits erhebliche Werte erreicht hat.¹⁾ Vielmehr hat sich als ganz allgemeines Resultat aller Messungen ergeben, daß mit Annäherung an die Sättigung die Widerstandszunahme ΔR eine lineare Funktion des Quadrats der Magnetisierung $\Delta R = c(J^2 - J_0^2)$ wird²⁾: beim Einkristall scheint (W. Gerlach, a. a. O.) die Größe J_0 die Komponente der spontanen Magnetisierung auf die der Magnetisierung unterworfenen Kristallrichtung zu sein. Das Gebiet, innerhalb dessen die quadratische Beziehung gilt, ist um so größer, je härter das Material ist. Auch beginnt die Widerstandszunahme bei um so kleinerer Magnetisierung, je härter das Material ist. Außer dem schon

1) W. Gerlach, II. Mitt., a. a. O.

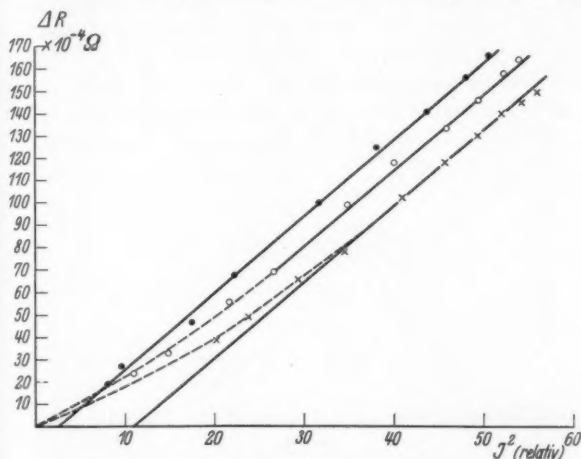
2) Vgl. die theoretischen Arbeiten von A. Perrier z. B. *Helv. Phys. Acta* 3. S. 400. 1930.



noc
alle
rev

in der zitierten Arbeit von Gerlach¹⁾ enthaltenen Material seien hier einige Versuchsdaten gegeben.

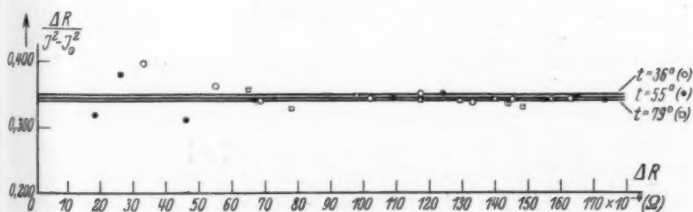
Wir geben zunächst in Figg. 14 und 16 einige Messungen an dem sehr harten Ni II, welcher eine besondere Erscheinung



Widerstandsänderung und Quadrat der Magnetisierung

○ 36° · 55° × 79° C

Fig. 14



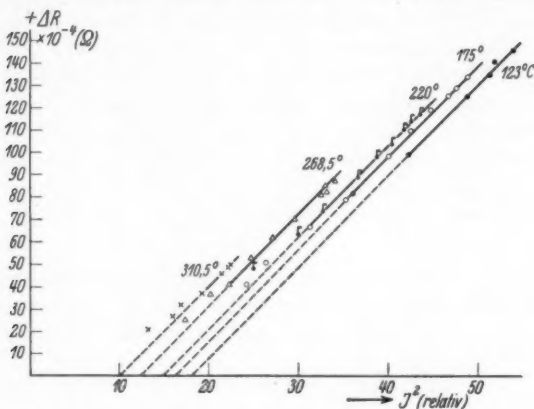
Einzelwerte der Konstanten c (vgl. Fig. 14)

Fig. 15

noch zeigte, die (allerdings in viel geringerem Maße) auch bei allen anderen Proben beobachtet wurde: eine gewisse Irreversibilität. Auch nach längerem Erhitzen wurden durch

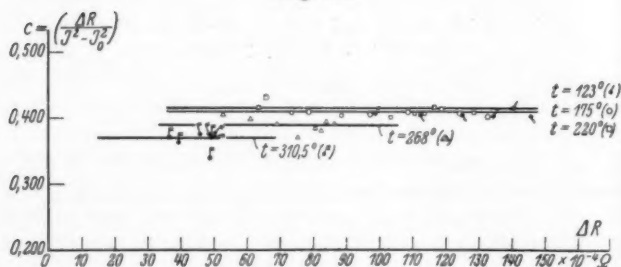
1) W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 649. 1931.

jede neue Erwärmung des Versuchsdrahtes die Absolutwerte der Magnetisierung und des spezifischen Widerstandes und besonders der Widerstandszunahme bei Temperaturen unter



Widerstandsänderung und Quadrat der Magnetisierung

Fig. 16a



Einzelwerte der Konstanten c (vgl. Fig. 16a)

Fig. 16b

100° C geändert. Weiss und Forrer haben schon hierauf hingewiesen.

Da der Draht aus Ni II gerade zur Untersuchung dieser Irreversibilität vorher nicht thermisch behandelt war, zeigte er diese Erscheinung sehr stark. Fig. 14 gibt drei Messungen der Widerstandszunahme als Funktion des Quadrats der

Magnetisierung (in relativer Einheit) bei 36°, 55°, 79° C, wobei bemerkt sei, daß zuerst bei 36°, dann bei 79° gemessen wurde, daß die Sättigung (im maximalen Feld von 800 Gauss) noch lange nicht erreicht war, und daß nach längerer Erhitzung bis 250° die Messung bei 55° ausgeführt wurde. Obwohl also die Absolutwerte gänzlich geändert sind, haben die Kurven die gleiche Neigung (Fig. 15). Die Messungen bei Temperaturen oberhalb 100° bis zum Curiepunkt zeigen wieder unter sich gleichen Charakter, haben aber eine andere Neigung; Fig. 16a zeigt die Ergebnisse der Messungen: die Geraden $\Delta R = c (J^2 - J_0^2)$

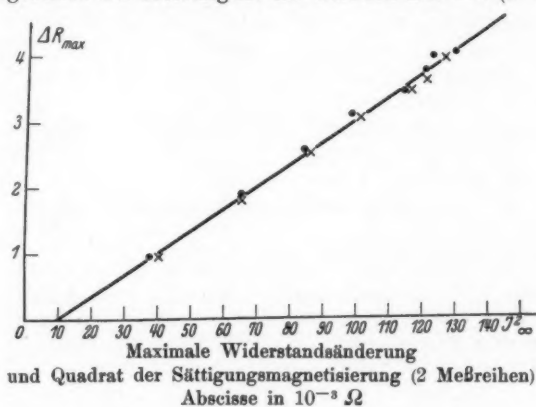


Fig. 17

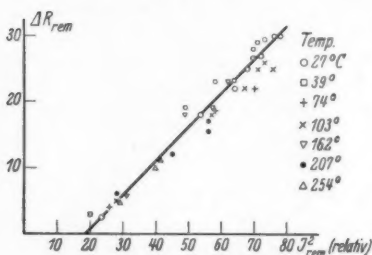
bei den angegebenen Temperaturen, Fig. 16b die Werte der Proportionalitätskonstanten c .

Über die Gründe für die Irreversibilität und über die Frage, was die Größe J_0 bei sehr hartem Material bedeutet, konnte trotz vieler Versuche noch keine Klärung erreicht werden. Es scheint sich hier um *einige* der Struktureinflüsse zu handeln, welche das Magnetisierungsproblem so kompliziert machen.

Wie allgemein aber die quadratische Beziehung zwischen Magnetisierung und Widerstandsänderung erfüllt ist, sei noch an zwei anderen Beispielen gezeigt. Es war oben (vgl. Fig. 9) schon darauf hingewiesen worden, daß die maximale Widerstandsänderung sehr annähernd die gleiche Temperaturabhängigkeit wie das Quadrat der Sättigungsmagnetisierung zeigt. Dennoch ergab sich auch hier nicht exakt $\Delta R_{max} = c J_{\infty}^2$,

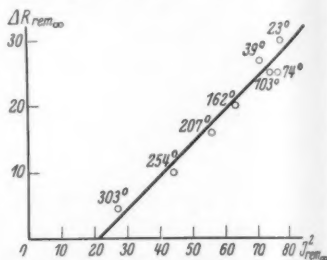
sondern ebenfalls $c(J_\infty^2 - J_0'^2)$, wobei allerdings das J_0' nur einige Prozente des Quadrats der maximalen Sättigungsmagnetisierung bei tiefer Temperatur beträgt (Figur 17).

Das zweite Beispiel liefert die *Remanenz*. Es wurde die remanente Magnetisierung und die remanente Widerstandsänderung gemessen als Funktion der Vormagnetisierung; d. h. man bestimmte R bei völliger Entmagnetisierung, magnetisierte dann der Reihe nach auf die Werte J_1, J_2 usw. und maß nach jeder Magnetisierung die remanente Magnetisierung und die remanente Widerstandsänderung. Diese Werte



Remanente Widerstandsänderung
als Funktion des Quadrats der
remanenten Magnetisierung
Abszisse in $10^{-5} \Omega$

Fig. 18a



Maximale Widerstandsremanenz
als Funktion des Quadrats der
remanenten Magnetisierung

Fig. 18b

geben wieder eine lineare Beziehung mit einem für alle Temperaturen praktisch gleichen $J_0'^2$ und gleicher Neigung. Fig. 18a gibt einige der Messungen. Auch das Quadrat der maximalen magnetischen Remanenz und die maximale Widerstandsremanenz bei verschiedenen Temperaturen liefern die gleiche Beziehung (Fig. 18b). Innerhalb der — bei den kleinen magnetischen Remanenzwerten nicht sehr hohen — Versuchsgenauigkeit scheint die Neigung aller Remanenzgeraden die gleiche. Sie ist auch angenähert gleich der Neigung der Kurven $\Delta R = c(J_\infty^2 - J_0'^2)$ bei Variation von J durch die Temperatur.

Zusammenfassung

Als wesentliche Ergebnisse betrachten wir folgende Punkte:

1. Die magnetische Widerstandserhöhung unterhalb des Curiepunktes ist mit der Magnetisierung gesättigt.

2. Die Widerstandserhöhung hängt mit der Magnetisierung J durch eine Beziehung $\Delta R = c (J^2 - J_0^2)$ zusammen, unabhängig davon, ob die Magnetisierung durch Feld oder Temperatur variiert wird oder ob die Remanenzwerte in Beziehung gesetzt werden.

3. Die Größe J_0 ist nur beim Einkristall definiert. Beim polykristallinen Material ist sie stark strukturabhängig, und zwar um so kleiner, je härter das Material ist.

Die Arbeit ist auf Anregung und unter der Leitung von Hrn. Prof. W. Gerlach ausgeführt. Der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft haben wir für die Überlassung eines der wertvollen Wolffschen Kompensationsapparate zu danken.

München, Physikalisches Institut der Universität,
Juni 1931.

(Eingegangen 27. Juni 1931)

Über die Permeabilität bei Hochfrequenz

*Einige Bemerkungen zu den Arbeiten des Hrn. R. Michels
und des Hrn. M. Wien*

Von W. Arkadiew

(Mit 4 Figuren)

Vorliegender Artikel hat den Zweck, die Frage der magnetischen Eigenschaften bei Hochfrequenz näher zu beleuchten. Vor kurzem sind Arbeiten veröffentlicht worden, die meines Erachtens das diesbezügliche Material der Literatur, wie auch der Versuchsergebnisse, außer acht gelassen hatten, was zu Mißverständnissen führen könnte.

In der in diesen Annalen erschienenen Arbeit des Hrn. Michels¹⁾ sind einige Behauptungen ausgesprochen, die leider den Tatsachen nicht genügend entsprechen. Hr. Michels führt auf der Seite 879 eine Figur aus meiner Arbeit über die Absorption elektrischer Drahtwellen an und sagt auf Seite 881:

„Zur Erklärung seiner Beobachtungen führte Arkadiew in die zweite Maxwellsche Gleichung die sog. ‚magnetische Leitfähigkeit‘ ein und entwickelte mit Hilfe dieser Größe seine ‚viskosoelastische Theorie der magnetischen Spektren‘.“

Die magnetische Leitfähigkeit hält Hr. Michels für entbehrlich (S. 898).

Diese Größe findet ihre Stelle in dem zweiten Glied der zweiten Maxwellschen Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} E \\ -\operatorname{rot} E &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{4\pi\rho}{c} H \end{aligned}$$

und spielt eine Rolle bei den sinusoidalen zeitlichen Änderungen des magnetischen Feldes H .

1) R. Michels, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 877. 1931. Heft 7.

Die Größe q und die damit verbundene komplexe Permeabilität

$$(1) \quad \mu - i q' = \mu - i 2 q T$$

entstammten in Wirklichkeit der Hypothese des Mitschwingens der magnetischen Zentren und der darauf begründeten Theorie der magnetischen Dispersion, die ich im Jahre 1913 zur Erklärung des Verschwindens der magnetischen Eigenschaften im Gebiete der ultrahertzschen Wellen entwickelt hatte¹⁾.

Auf Grund dieser Theorie haben später R. Gans und R. Loyarte²⁾ das von ihnen in einem Nickeldraht erhaltene Absorptionsband rechnerisch bearbeitet und die magnetische Leitfähigkeit q für diesen Draht bei verschiedenen Frequenzen berechnet. Die magnetische Leitfähigkeit wurde in vielen Arbeiten, auch bei mäßiger Frequenz, besonders in der theoretischen Elektrotechnik benutzt. Von der magnetischen Leitfähigkeit hatte Mittelstrass³⁾ Gebrauch gemacht. Mittelstrass hatte gezeigt, daß q eine genauere Berechnung der Verteilung des Wechselstroms im Inneren eines Eisenzylinders ermöglicht. Ermolaev⁴⁾ hat die Anwendbarkeit der magnetischen Leitfähigkeit zur Berechnung des Wechselstromwiderstandes und der magnetischen Verluste im Eisendraht für die technische Frequenz gezeigt und, ebenso wie später Antik⁵⁾, gefunden, daß die erhaltenen Werte, die man mit Hilfe der magnetischen Leitfähigkeit ermittelt, viel genauer sind als die, welche man mit alten Formeln berechnen kann.

Die Größe q drückt die Tatsache der Existenz der Hysteresen aus und des damit verbundenen magnetischen Verlustes Q der elektromagnetischen Energie, der bei den elektromagnetischen Vorgängen in ferromagnetischen Metallen entsteht. Die Größe q nimmt man bei sinusoidalen Vorgängen gleich

$$q = \frac{2Q}{TH_0^2},$$

wo T die Periode und H_0 die Feldamplitude bedeuten.

1) W. Arkadiew, Eine Theorie des elektromagnetischen Feldes in ferromagnetischen Metallen. *Phys. Ztschr.* 14. S. 928. 1913.

2) R. Gans u. R. Loyarte, *Ann. d. Phys.* 64. S. 209. 1921. — R. Gans, *Ann. d. Phys.* 64. S. 250. 1921. — W. Arkadiew, *Ann. d. Phys.* 65. S. 643. 1921; 66. S. 130. 1921. — R. Gans, *Ann. d. Phys.* 66. S. 429. 1921.

3) A. Mittelstrass, *Arch. f. El.* 19. S. 595. Heft 6. 1927.

4) A. Ermolaev, *Arch. f. El.* 23. S. 101. Heft 1. 1929.

5) J. Antik, *Arch. f. El.* 25. S. 125. Heft 2. 1931; vgl. ferner Fig. 4.

Dieses Verfahren, den Hystereseverlust Q bei Benutzung der Maxwellschen Gleichungen Rechnung zu tragen, ist nun bereits üblich geworden.

Die Anwendung der magnetischen Leitfähigkeit und der komplexen Permeabilität kann man jetzt in vielen Arbeiten und Lehrbüchern¹⁾ finden, wo dasselbe Rechnungsverfahren angenommen ist, obwohl das Wort „magnetische Leitfähigkeit“ dort nicht immer benutzt wurde. Es scheint, daß die Einwände des Hrn. Michels über die magnetische Leitfähigkeit auf Mißverständnissen beruhen.

Nun gehe ich zur Frage bezüglich der Genauigkeit der Messungen über. Hr. Michels (ebenso wie einige andere Verfasser) weist auf die Beobachtungen von Laville²⁾ hin, die man manchmal als sehr genaue einschätzt. Laville prüfte mit ungedämpften Schwingungen die Theorie von G. Mie³⁾ der Fortpflanzung in Drähten der elektromagnetischen Wellen.

Für den Absorptionskoeffizient der Wellen in Aluminiumdrähten γ führt er folgende Werte von $10^5 \cdot \gamma$ an, die er aus dem Versuch erhalten und theoretisch berechnet hat:

Tabelle 1

λ cm	649,1	447,3	401,5	341,5	297,4
Beobachtet Laville....	3,30	3,97	4,19	4,63	4,91
Berechnet Laville.....	3,305	3,985	4,21	4,66	4,98
Berechnet Arkadiew ..	3,48	4,24	4,41	4,79	5,11

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß die von Laville berechneten Zahlen mit den beobachteten bis auf Bruchteile eines Prozentes übereinstimmen. Bei Prüfung seiner Berechnungen kann man sich aber überzeugen, daß mit den Formeln von Laville in Wirklichkeit um 1—3 Proz. größere Werte erhalten

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **66**. S. 429. 1921; Phys. Ztschr. **24**. S. 232. 1923. — M. Latour, Proc. Inst. Radio Ing. **7**. S. 61. 1919. — L. Truxa, Arch. f. El. **12**. S. 354. 1923. — L. Tonks, Phys. Rev. **23**. S. 221. 1924. — B. Wwedensky, Ztschr. f. Phys. **34**. S. 309. 1925. — F. Ollendorf, Grundl. d. Hochfrequenztechn. S. 90. 1926. — H. G. Moeller, Behandlung der Schwingungsaufgaben mit komplexen Amplituden. S. 18. 1929.

2) G. Laville, Ann. de phys. **2**. S. 427. 1924.

3) G. Mie, Ann. d. Phys. **2**. S. 201. 1900.

werden; außerdem sind seine Formeln selbst ungenau¹⁾); bei der Berechnung des Wechselstromwiderstandes r' der Drähte gebraucht er einen abgekürzten Ausdruck

$$r' = r \cdot k.$$

Bei der Anwendung der genaueren Formel

$$r' = r (0,997 k + 0,277)$$

erhält man aber um 3,4—6,8 Proz. größere als die von Laville beobachteten Werte. Die Prüfung der Theorie der Fortpflanzung der Drahtwellen gibt also bei Laville eine systematische Ablenkung, die manchmal mehr als 5 Proz. beträgt.

Laville untersuchte auch Drähte aus ferromagnetischem Material. Für Eisendrähte erhält er außerordentlich konstante Werte der Permeabilität bei verschiedenen Wellenlängen von 3 m bis zu 87 m: $\mu_x = 74, 73,5, 73,6, 73,5, 75$ und 74. Indessen erreichen, wie er selbst schreibt, die Beobachtungsfehler bei Bestimmung von γ bei seinen Messungen 4 Proz., was bei Berechnung von μ_x keine größere Genauigkeit als 8 Proz. verspricht. Dieses, ebenso wie die Diskrepanz bei der Prüfung der Theorie, machen die von Laville gewonnenen Werte der Permeabilität sehr zweifelhaft.

Die Werte von Michels scheinen auch nicht sicher zu sein. Jetzt ist bekannt, daß der mechanische Zustand eines Eisendrahtes sehr wichtig ist, wie die Versuche von Ssadikov²⁾ lehren: die Spannung oder die Biegung eines Eisendrahtes kann seinen Wechselstromwiderstand (Resistanz) manchmal um 23 Proz. und die innere Selbstinduktion (innere Induktanz) um 40 Proz. ändern.

Die Versuche von Ssadikov haben u. a. gezeigt, daß ein Voltmeter schon einen Unterschied der verbrauchten Energie zeigt, falls der von Wechselstrom durchflossene Eisendraht auf dem Tisch freiliegt oder durch sein Eigengewicht gespannt ist, falls der Draht an einem seiner Enden herunterhängt. Die horizontal aufgespannten Drähte sind zur Belastung und zu den Temperaturschwankungen infolge der damit verbundenen großen Spannungsänderungen besonders empfindlich. Wahr-

1) Vgl. darüber noch W. Kessenich, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 606. 1930.

2) B. Ssadikov, Anzeiger f. Elektrot. Nr. 5. 1930 (russ.); Arch. f. El. 25. S. 431. 1931.

scheinlich verursachten diese damals noch unbekannten und noch nicht in Rechnung gezogenen Faktoren die großen Abweichungen in früheren Messungen. In der Arbeit von Michels sind sie auch nicht berücksichtigt. Unterdessen muß man jede veränderliche Belastung der aufgespannten Drähte versehen, wie z. B. diejenige, die durch das Thermoelement verursacht wird, wenn es den Drähten entlang einhergeschoben wird. Bei seiner Stellung in der Drahtmitte oder nahe am Drahtende, falls die Drähte ohne Gewichte und ohne Rollen gespannt sind, ruft das Thermoelement Änderungen der mechanischen Spannung hervor, die auf die Absorptions- und Wellenlängenmessungen einen Einfluß ausüben können. Das Thermoelement selbst, falls es die Drähte berührt, kann nicht als ein indifferentes Instrument betrachtet werden. Bei dem Vergleich der Selbstinduktion der Drähte in der Tonfrequenz mit derjenigen in der Hochfrequenz muß man nicht nur die Feldstärke, sondern auch die gleiche mechanische Spannung des Eisendrahtes berücksichtigen, oder, besser, jede Spannung eliminieren.

Die Entstehung der Banden im magnetischen Spektrum kann, wie wir jetzt wissen, verschiedenen Ursprungs sein. Außer den Strukturgründen können noch in einigen Fällen die mechanischen Schwingungen des zu untersuchenden Eisenstücks eine Rolle spielen. Die von uns verdächtige durch die Magnetostriktion erregten Resonanzschwingungen der Eisenproben waren tatsächlich in Amerika¹⁾ und fast gleichzeitig²⁾ auch in Moskau gefunden worden. Die von ihnen verursachte Absorption der Energie und ein besonderes Verhalten der Permeabilität, die bei bestimmten Perioden hervortreten, können den Eindruck einer magnetischen spektralen Bande abgeben.³⁾ Da die Entstehung dieser mechanischen Schwingungen von der Befestigungsart der Eisenprobe abhängt, können die genannten Anomalien der Permeabilität zutage treten oder nicht.

Die Wichtigkeit der vorläufigen Entmagnetisierung des Drahtes ist in der Arbeit von Antik⁴⁾ betont. Ebenso wichtig

1) G. W. Pierce, Proc. Am. Ac. 63. S. 8. 1928.

2) N. Malov, Fortschr. d. Phys. Wiss. 9. S. 859. 1929 (russ.). — N. Malov, W. Mitiaev u. S. Rschewkin, Festschrift des Magn. Laboratoriums in Moskau. S. 119.

3) Vgl. darüber W. Arkadiew, Festschrift des Magn. Laboratoriums in Moskau. S. 58.

4) J. Antik, a. a. O., S. 128.

kann der Polierungsgrad der Drähte, besonders in kürzesten Wellen, werden, vgl. unten.

Um die Bemerkungen zur Arbeit des Hrn. Michels abzuschließen, könnte man noch bemerken, daß die von Michels angegebene Wellenlänge in Johnsen Versuchen in Wirklichkeit 5,12 m betrug; der Wert 2,6 m könnte sich auf die Halbwellenlänge beziehen, die in der Arbeit von John als Maß der Periode angeführt ist.

Bei der Berücksichtigung aller oben hingewiesenen Umstände und bei der Annahme von strengen Vorsichtsmaßregeln in bezug auf mögliche, z. T. zufällige, Fehler werden die modernen Beobachtungen vorgenommen.

In der letzten Arbeit von Malov¹⁾ zeigten ein Eisendraht von 0,043 mm Durchmesser und ein anderer Draht von 0,1 mm in dem Gebiete der Wellen von 50—138 m ein allmähliches Abfallen der Permeabilität²⁾ den kürzeren Wellen zu. Die Methode von Malov bestand in der Messung der Erwärmung eines mit Wechselstrom durchströmten Eisendrahtes mittels eines Thermoelements. Kürzlich wurden derartige Beobachtungen von Strutt³⁾ vorgenommen. In seiner Arbeit ist noch auf eine Reihe von Fehlerquellen hingewiesen. V. Uryson hat den Wechselstromwiderstand in einem Schwingungskreise gemessen (Arbeit im Druck). K. Volkova⁴⁾ hat die scheinbare Permeabilität und Wärmeverluste bei Einbringen von Bündeln aus 6—60 Eisendrähten im Wechselfeld von einigen hundertstel Oerstedt beobachtet. Alle diese Arbeiten stehen im Wesentlichen im Einklang.

Jetzt wende ich mich den Bemerkungen des Hrn. Wien⁵⁾ zu. Hr. Wien sucht die Verminderung der magnetischen Eigenschaften zu den kürzeren Wellen und das Verschwinden derselben in ultrahertzschen Wellen, wo $\mu = 1$ wird, durch die Hypothese der Existenz einer dünnen unmagnetischen oder

1) N. Malov, Journ. d. angew. Phys. 6. Heft 5. S. 26. 1929 (russ.); Phys. Ber. 11. S. 454. 1930; Ztschr. f. Phys. (im Druck).

2) Über die Natur dieses Abfallens vgl. meinen Artikel in Ztschr. f. Phys., 1931 (Arbeit im Druck).

3) M. J. O. Strutt, Ztschr. f. Phys. 68. S. 632. 1931.

4) Die Methode ist in der Festschrift des Magn. Laboratoriums in Moskau veröffentlicht, K. Volkova, S. 67. 1931.

5) M. Wien, Ann. d. Phys. [5] S. 899. H. 7. 1931.

schwach magnetischen und schwach leitenden Schicht zu erklären, die die Metalle bedecke.

Diese Hypothese stellt eine Entwicklung des einmal von Foersterling¹⁾ ausgesprochenen natürlichen Gedankens über die Inkonzanz der Permeabilität in dem Drahtquerschnitte vor.

Diese Voraussetzung erklärte in den damaligen Experimenten eine Diskrepanz zwischen Berechnung und Beobachtung. Die Hypothese des Hrn. Wien stützt sich auf die Theorie von Foersterling¹⁾ über das Verhalten eines metallischen Leiters mit einer Hülle aus anderem Metall. In der Tat kann diese Theorie eine Beschreibung einiger Züge der beobachteten Erscheinungen geben. Auf einem Gebiete der Wellen erklärt sie die von uns festgestellte Tatsache, daß die Permeabilität μ_n , welche man aus der inneren Wechselstromselbstinduktion eines Eisendrahtes berechnet, immer kleiner ausfällt als μ_k , welche sich aus dem Widerstand desselben Drahtes bei demselben Wechselstrom ermitteln läßt. Die Mantelhypothese kann uns gleichfalls erklären, warum μ_k und μ_n bei bestimmten kleinen Wellenlängen gleich 1 werden: falls die Permeabilität des Mantels μ_1 „nur wenig von 1 abweicht“ (S. 904) und falls die Eindringtiefe z' der Wellen in Drahtmaterial infolge des Skineffektes kleiner als die Manteldicke l wird, so verhält sich der Draht in der Tat als ein unmagnetischer.

Hr. Wien selbst wendet diese Hypothese bei folgendem konkreten Falle an. Hr. Michels hat eine kleine Änderung der Permeabilitäten als μ_k , so auch μ_n zwischen den Wellenlängen von 3,5 bis 14 m beobachtet. Hr. Wien setzt voraus, daß die Permeabilität μ und die elektrische Leitfähigkeit σ der Oberfläche des Drahtes nach sich vermindern und die Werte μ_1 und σ_1 erhalten. Hr. Wien paßt, entsprechend der Theorie von Foersterling, solche Kombination

$$\frac{\mu \sigma_1}{\mu_1 \sigma}$$

im Drahtinnern an, daß aus der Rechnung nach der Foersterlingschen Theorie die Versuchswerte von μ_k und μ_n gleichzeitig von der Differenz $\mu_k - \mu_n$ sich ergeben. In einem Fall gelingt das ihm zu erreichen, in einem anderen aber ergibt der

1) K. Foersterling, Ann. d. Phys. 72. S. 30 u. 52. 1923. Auf den etwaigen Einfluß der Struktur des Drahtes habe ich seinerzeit Ph. Ztschr. 14. S. 934. 1913 hingewiesen.

Versuch statt einer Verminderung von μ_k eine Vergrößerung dieser Permeabilität zu den kürzeren Wellen (Fig. 1 der Arbeit des Hrn. Wier).

Um nach der Hypothese der Oberflächenschicht das Verschwinden der magnetischen Eigenschaften im Gebiete der Wellenlänge von 1 cm, das von mir im Jahre 1911 beobachtet wurde, zu erklären, muß man nach Wien die Permeabilität der Schicht μ_1 gleich 1 setzen.

Um die wirksame Permeabilität an der Drahtschicht kleiner anzunehmen, als im Drahtinnern, könnte uns eher die Existenz der etwaigen Längsritzen auf der Drahtoberfläche veranlassen; diese Ritzen können nach dem Schmirgeln auf dem Draht bleiben; sie können den magnetischen Widerstand für den zirkulären magnetischen Fluß, der an der Drahtoberfläche konzentriert ist, vergrößern. Wir wenden oft diese Wirkung der Längsschlitz in der Technik an, um den Wechselstromwiderstand von eisernen Leitern zu vermindern.¹⁾ Infolge der Ritzen würde die Permeabilität in scheinbarer Weise verkleinert werden und für ganz kurze Wellen, deren Eindringtiefe kleiner als die Ritzentiefe ist, hätten wir einen kleineren elektrischen Widerstand, als derjenige bei einem glanzpolierten Draht.

1. Aber weder die Wiensche Schicht, noch diese letzte hypothetische Struktur der Drahtoberfläche können das charakteristische Sinken des Widerstandes in kürzeren Wellen erklären. In Fig. 1 sind zwei Kurven dargestellt: die Kurve *M* ist nach der Theorie von Foersterling in folgenden Voraussetzungen berechnet: $\sigma_1 = \sigma$ = Leitfähigkeit des Eisens, $\mu = 100$, $\mu_1 = 1$, Manteldicke $l = 0,5$ Mikron; die Kurve *E* stellt die Versuchswerte für den Eisendraht derselben Dicke vor (Nr. 2 der folgenden Tab. 2); l ist so gewählt, daß beide Kurven bei $\lambda = 1,31$ cm und $\mu_k = 4,1$ einen gemeinsamen Punkt hätten.

Als Abszisse ist $lg \lambda$, als Ordinate $lg r'$ eingetragen. Sogar trotz der scharfen Grenze zwischen der Schicht und dem Drahtkerne und trotz der gleichmäßigen Dicke der Schicht dem Drahte entlang, die die Theorie voraussetzt, beim Versuch aber kaum verwirklicht werden können, wächst der Wechselstromwiderstand mit der Erhöhung der Frequenz beständig an.

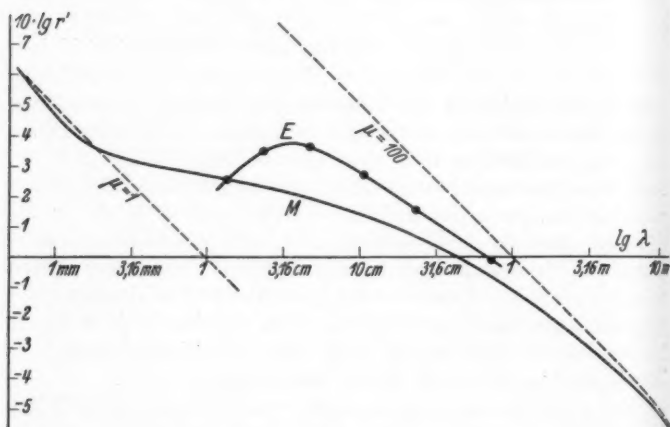
In Wirklichkeit aber gibt es ein Maximum des Wechselstromwiderstandes r' der magnetischen Drähte, das ungefähr

1) W. Arkadijew, Kartothek SO, Energetische Abt., (russ.).

bei der Wellenlänge von 4 cm liegt (Kurve *E*); hier liegt auch das Maximum des Absorptionskoeffizienten des Drahtes¹⁾

$$\gamma = 2 r' C \omega,$$

wo *C* die Kapazität der Drähte und ω die Wellengeschwindigkeit bedeuten.



Verhalten eines Eisendrahtes bei verschiedenen Frequenzen. *M* — die nach der Manteltheorie berechnete Kurve; Manteldicke $l = 0,5$ Mikron, $\mu_1 = 1$, $\mu = 100$; *E* — die aus dem Experiment erhaltene Kurve (Draht Nr. 2 aus der Tab. 2)

Fig. 1

Unmittelbar gemessene Werte von $10^4 \cdot \gamma$, für einen konstanten Abstand $a = 1,7$ mm zwischen den parallelen Drähten umgerechnet, sind für verschiedene Wellen von 1,31 bis 72,7 cm in folgender Tabelle dargestellt.

Wir sehen, daß drei ferromagnetische Drähte aus vier systematisch gemessenen eine scharfe Abnahme von γ zu den kürzeren Wellen aufweisen. Für den vierten Draht ist der

1) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. 58. S. 105. 1919, Fig. 10, die in Fig. 1 der Arbeit von Michels reproduziert ist. Ein ähnliches Maximum wurde von R. Gans und R. Loyarte, a. a. O., aber bei längeren Wellen, beobachtet.

Tabelle 2

Nr.		2 R in mm	1,31	2,31	4,82	10,63	23,8	72,7 cm
1	Eisendraht, geglüht	0,20	227	275	285	238	—	—
2	„ unglüht	0,20	202	250	260	221	160	108
3	Nickeldraht	0,20	81	80	77,5	48,5	—	—
4	„	0,053	—	26	28	27	18	14
5	Neusilberdraht, beob.	0,10	248	192	105	90	—	—
6	„ ber.	0,10	240	192	104	94	—	—

Effekt, aus Mangel an Punkten, nicht anschaulich.¹⁾ Zur Kontrolle sind noch die beobachteten und die berechneten Werte für einen Neusilberdraht angeführt. Der hier dargestellte, aus dem Versuch ermittelte Verlauf des Absorptionskoeffizienten ferromagnetischer Drähte widerspricht der Hypothese des Mantels, da die Verminderung des Absorptionskoeffizienten nach dem Übergang durch das Maximum für eine Vergrößerung der Hautdicke z' spricht; hier müßten die ferromagnetischen Eigenschaften nach der Hypothese des Mantels oder der Ritzen noch stärker ausgedrückt sein. In Wirklichkeit aber verschwinden sie hier (vgl. unten Fig. 2 und 3).

2. Daß die Oberflächenschicht der untersuchten Eisendrahte keine außerordentlichen Eigenschaften hatte, dafür sprechen auch folgende Tatsachen. Der Unterschied in der magnetischen Härte äußerte sich in meinen Versuchen bis zu den kürzesten Wellen, wo der ausgeglühte Eisendraht eine größere Permeabilität zeigte, als derselbe Eisendraht vor dem Ausglühen; ich führe hier die Werte für den Eisendraht von 0,2 mm Durchmesser an:

$\lambda = 1,31$ cm, vor dem Ausglühen $\mu_k = 4,1$, nach 4,5,

$\lambda = 2,31$ cm, vor dem Ausglühen $\mu_k = 11,9$, nach 14,7

(vgl. Tab. 11 und 12 meines Artikels von 1919).

Ebenso wie bei den längeren Wellen (Klemenčič, Strutt) bleiben auch in diesem Bereiche die Permeabilitätswerte von der Feldstärke fast unabhängig, obwohl man letztere manchmal

1) Trotzdem hat dieser Draht ein besonders scharf ausgedrücktes Maximum, vgl. W. Arkadiew, Ztschr. f. Phys. 28. S. 18. Fig. 4. 1924.

achtmal änderte. In folgender Tabelle sind die Werte für ausgeglühte Drähte angeführt; A bedeutet die Ausschläge des Galvanometers. Die angeführten Zahlen H haben eine relative Bedeutung; absolut stellen sie nur die Größenordnung der niederen Grenze der Feldstärke an der Drahtoberfläche¹⁾ dar.

Tabelle 3

Eisendraht. 0,201 mm Durchm. $\lambda = 10,63$ cm								
A mm	110	84	44	43	95	8,6	2,5	
H oerst.	1,8	1,6	1,1	1,1	0,53	0,41	0,27	
μ_k	54	51	48	47,6	54,5	49,6	54	
Eisendraht. 0,026 mm Durchm. $\lambda = 10,63$ cm								
A mm	254	150	100	43	25	16	3,5	
H oerst.	26	20	17	11	19	6,5	3,3	
μ_k	43,2	42,4	40,2	40,2	43,2	39,0	39	
Nickeldraht. 0,055 mm Durchm. $\lambda = 10,63$ cm								
A mm	100	60	46	37	11	3,7	—	
H oerst.	7	5,4	4,7	4,2	2,3	1,3	—	
μ_k	5,3	5,8	5,7	6,1	6,7	5,7	—	

3. Gegen die Hypothese der Oberflächenschicht mit besonderen Eigenschaften sprechen noch folgende Erwägungen.

Falls die Oberflächenschicht von Metallen eine andere Leitfähigkeit hat, warum ergaben denn die Versuche von Hagen und Rubens denselben Wert des Reflexionskoeffizienten, den die Berechnung aus der Leitfähigkeit des massiven Metalls ermittelte? Inzwischen war die Tiefe, wo die Amplitude der Welle den e -ten Teil ihrer initialen Amplitude erreicht (Eindringtiefe z'), bei der Frequenz der Rubensschen Wellen 0,1 bis 0,02 Mikronen gleich. Diese Tiefe, wo die Metalle noch ihre gewöhnliche Leitfähigkeit beibehalten²⁾, ist kleiner, als es notwendig ist, um die Verminderung der magnetischen Eigenschaften bei zentimeterlangen Wellen zu erklären, wo die Eindringtiefe von der Größenordnung von 1 Mikron ist.

1) Über deren Berechnung vgl. W. Arkadiew, Abh. d. El.-techn. Inst. d. Union. Heft 6. S. 142. 1925.

2) Die kritische Dicke der auf dem Glas erhaltenen Schichten ist nach den Angaben von A. Riede, Ztschr. f. Phys. 28. S. 177. 1924, für Nickel 0,012 Mikron gleich. Für Edelmetalle findet G. Braunsfurth, Ann. d. Phys. [5] 9. S. 385. 1931, sie noch viel kleiner.

In meinen Versuchen¹⁾ hatte ein Neusilberdraht (vgl. Tab. 2, Nr. 6) bei der Messung des Absorptionskoeffizienten der Wellen von 1,3 cm Länge die Eindringtiefe z' gleich 1,78 Mikronen; ein Silberdraht hatte bei der Wellenlänge von 2,3 cm $z' = 0,58$ Mikronen. Warum stimmen die Werte des Absorptionskoeffizienten im ersten Falle bis zu 3,3 Proz. und im zweiten bis zu 0,3 Proz. mit den theoretischen überein, die aus der mit der Wheatstoneschen Brücke gemessenen Leitfähigkeit berechnet worden sind?

Man kann noch hinzufügen, daß die ferromagnetischen Metalle in dünnen Schichten öfters untersucht worden waren; die durchsichtigen Schichten des Eisens und des Nickels, deren optische Eigenschaften für das durchgehende Licht der „optischen“ Permeabilität $\mu = 1$ des massiven Eisens entsprechen, die große Magnetisierbarkeit des letzteren beibehalten.

Über die dünnen Eisenschichten auf dem Glas kann man in der Literatur folgendes finden:

„Schneidet man aus einem Eisenspiegel einen länglichen Streifen, so kann man denselben leicht durch Streichen mit einem Magnet zu einem permanenten Magnet machen.“ „Man kann also einen durchsichtigen permanenten Eisenmagnet und ebenso durchsichtige Magnete von Kobalt und Nickel herstellen. An einem Kokonfaden aufgehängt, stellen sich diese durchsichtigen Magnete unter dem Einfluß des Erdmagnetismus ganz gut in den magnetischen Meridian.“ Die Dicke der Eisenschicht eines Spiegels ergab sich zu 0,000055 mm (Kundt²⁾].

Die magnetischen Eigenschaften der auf das Metall niedergeschlagenen Schichten von einigen hundertstel Mikronen Dicke und stärker wurden ausführlich von Maurain³⁾ untersucht, ohne etwaige Verminderung der spezifischen Magnetisierbarkeit gefunden zu haben. Die magnetischen Eigenschaften der Oberflächenschicht des massiven Eisens verursachen das sogenannte Kerrsche magnetooptische Phänomen, das in engem Zusammenhang mit der Drehung der Polarisationssebene in besprochenen Kundtschen Eisenspiegeln⁴⁾ steht. Die beiden Effekte weisen auf die gleich starke Magnetisierbarkeit der

1) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. 58. S. 105. 1919.

2) A. Kundt, Wied. Ann. 23. S. 228. 1884.

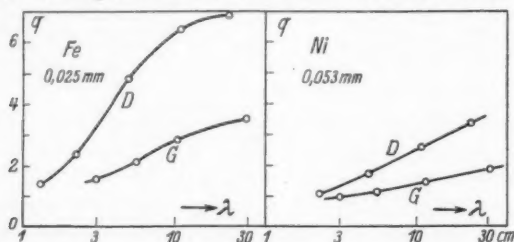
3) Ch. Maurain, J. d. Phys. 3. S. 90. 1902.

4) H. E. J. G. du Bois, Wied. Ann. 31. S. 951. 1887.

dünnen Schichten, im einzelnen der Oberflächenschichten massiven Metalls.¹⁾

4. Die besprochene Theorie der Resonanz der Elementarmagnete²⁾ erklärt das Maximum des Absorptionskoeffizienten (Kurve *E* auf Fig. 1) und verknüpft es quantitativ mit dem Verhalten der ferromagnetischen Drähte in Hertzschen Gittern.³⁾ Jetzt könnte diese Theorie durch die Theorie der Schwingungen des Magnetisierungsvektors in einzelnen Elementargebieten ersetzt werden. Die um diese Gebilde herum im Eisen entstehenden Induktionsströme können die große Dämpfung ihrer Eigenschwingungen erklären.

Das starke Sinken der Permeabilität ist in Fig. 2 dargestellt; es zeigt ein fast vollkommenes Verschwinden der



Verhalten der Nickel- und Eisendrähte bei der Fortpflanzung der Drahtwellen (*D*) und bei der Wellenreflexion an undichten Hertzschen Gittern (*G*)

Fig. 2

magnetischen Eigenschaften der Eisen- und Nickeldrähte zwischen den Wellen von 30 cm bis zu 1 cm.²⁾

Die Kurven *D* veranschaulichen die Verminderung der magnetischen Eigenschaften, die aus der Absorption der Wellen in parallelen Drähten hervortritt, die Kurven *G* — diejenige, die aus der Absorption bei der Reflexion der Wellen an undichten Hertzschen Gittern sich vorausberechnen läßt. Die in der

1) Über die etwaige praktische Anwendung der polarimetrischen Untersuchung des an einer kleinen aufgeschliffenen spiegelnden Fläche des zu prüfenden Eisenstückes reflektierten Lichtes vgl. du Bois, Magnetische Kreise, S. 14 und 361, Berlin 1894; Wied. Ann. **39**. S. 25. 1890.

2) W. Arkadiew, Phys. Ztschr. **14**. S. 928. 1913; Ann. d. Phys. **81**. S. 649. 1926.

3) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. **45**. S. 133. 1914; **58**. S. 105. 1919.

Fig. 2 eingetragenen Werte q stellen den Quotient der Absorption der Wellen in ferromagnetischen Drähten zu derjenigen in unmagnetischen desselben Widerstandes dar; q ist annähernd der Quadratwurzel der scheinbaren Permeabilität proportional. Die Permeabilität ist im Falle der Reflexion nicht nur kleiner, sondern sie erreicht den Wert 1 schon in den längeren Wellen.

Eine eingehende theoretische Analyse gestattete die Ursache dieses Unterschiedes in dem Verhalten der magnetischen Eigenschaften zu erklären¹⁾; im ersten Falle (D) haben wir die Wirkung der scheinbaren magnetischen Permeabilität μ_k , im zweiten (G) diejenige der scheinbaren Permeabilität μ_n ; ihr Unterschied ist folgender

$$(2) \quad \begin{cases} \mu_k = \sqrt{\mu^2 + \varrho'^2} + \varrho' , \\ \mu_n = \sqrt{\mu^2 + \varrho'^2} - \varrho' , \end{cases}$$

wobei

$$(3) \quad \varrho' = 2 \varrho T$$

ist. Da ϱ immer positiv ist, so erklärt das die Ungleichheit

$$\mu_k - \mu_n > 0$$

und den höheren Verlauf der Kurve D über der Kurve G .

Die Theorie der Resonanz der Elementarmagneten löst quantitativ die Frage der Differenz $\mu_k - \mu_n$. Die von dieser Theorie angezeigten Regeln¹⁾ zur Analyse der Kurve

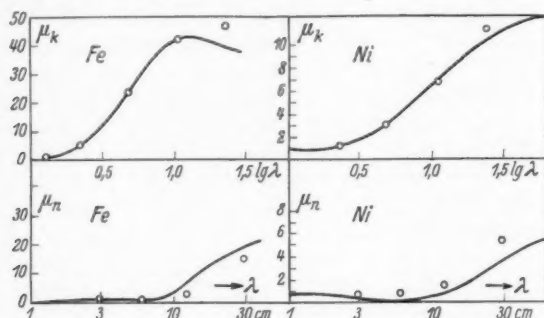
$$f = \frac{\mu_k}{k}$$

gestatten leicht, die drei Parameter λ_0 , Θ und k_∞ zu finden, welche den magnetischen Stoff charakterisieren. Mittels dieser Koeffizienten kann man μ und ϱ' berechnen und daraus nach (2) μ_n ermitteln.¹⁾ In Fig. 3 sind diese theoretischen Werte μ_k und μ_n mit Kurven dargestellt, die Versuchswerte — mit Punkten.

Die Versuchswerte von μ_n sind aus den Beobachtungen des Reflexionskoeffizienten der ferromagnetischen Hertzschen Gittern berechnet¹⁾, das heißt, aus den Kurven G der Fig. 2.

1) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. 81. S. 649. 1926.

Wir sehen, daß diese Kurven G hier ihre Approbation finden; die Beziehung der Kurven G zu den Kurven D erhält hier ihre Erklärung und die beiden Versuchsergebnisse D und G scheinen sich hier gegenseitig zu bestätigen.



Die Kurven μ_n , berechnet nach der Analyse der Kurven D , stimmen mit den aus den Kurven G ermittelten Punkten μ_n überein

Fig. 3

5. Die Gleichungen (2) und (3), die aus der Theorie der magnetischen Leitfähigkeit entfließen, gestatten, wie im Anfang gesagt wurde, einige Fragen der theoretischen Elektrotechnik zu lösen; dabei berechnet sich ϱ' aus der Formel

$$\varrho' = \frac{4Q}{H_0^2},$$

wo Q die Hysteresearbeit bedeutet. Die Theorie des Skin-effektes mit komplexer Permeabilität $\mu - i\varrho'$ gestattet, den Wechselstromwiderstand r' und die innere Reaktanz ωL_i der Eisendrähte zu berechnen. Dabei erweist sich, daß r' eine Funktion von μ_k und ωL_i von μ_n ist. Das erklärt die Tatsache, warum die Permeabilität, welche man aus der Selbstinduktion der Drähte berechnet, immer kleiner ausfällt, als die, welche sich aus dem Wechselstromwiderstand eines Eisendrahtes ermitteln läßt. In Fig. 4 ist ein Diagramm aus der Arbeit von Antik¹⁾ reproduziert. Die Kurven r' und ωL_i stellen den Wechselstromwiderstand pro Kilometer dar und bzw. die innere Reaktanz eines Eisendrahtes von $2R = 6,06$ mm

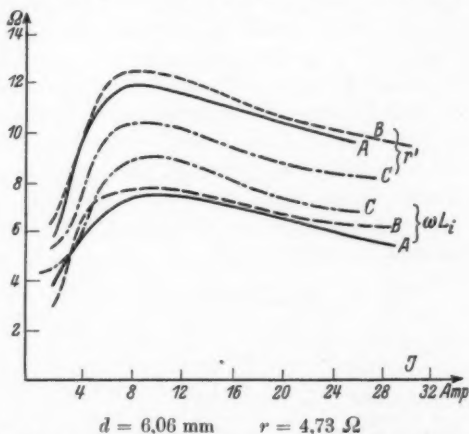
1) J. Antik, a. a. O.

Durchmesser bei 50 Perioden in Sekunden. Der Zennecksche Parameter

$$k = \frac{R}{z'} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_k}}$$

betrug dabei von 1,5 bis 1,9, was der Eindringtiefe z' etwa 1 mm entspricht.

Die Kurven A stellen die Versuchskurven, die Kurven B — die mit der Annahme der magnetischen Leitfähigkeit ρ be-



$d = 6,06 \text{ mm}$ $r = 4,73 \Omega$

Die Kurven B , die mit Einführung der magnetischen Leitfähigkeit berechnet sind, liegen näher zu den Versuchskurven A ; C — die mit dem rein reellen μ ermittelten Kurven

Fig. 4

rechneten, und C — solche nach den alten Formeln mit rein reellen μ erhaltene dar. Daß die Kurven A , ebenso wie B , stärker auseinander geschoben sind, als die Kurven C , ist nämlich der Ausdruck davon, daß $\mu_k > \mu_n$ ist. Wir sehen, daß μ zusammen mit der aus der Hystereseschleife berechneten Größe g' eine bessere Darstellung der Tatsachen ermöglicht.

Aus der mathematischen Theorie von Foersterling, die Hr. Wien benutzt, und die die Fortpflanzung der Wellen an metallischen Drähten mit leitendem Mantel behandelt und dabei die reelle μ berücksichtigt, folgt auch, daß die scheinbare Permeabilität μ_k größer als μ_n sein muß. In dem soeben

angeführten Beispiel des Eisendrahtes von 6,06 mm Durchmesser müßte die Wiensche schwach magnetisierbare Oberflächenschicht einige zehntel Millimeter dick sein, was infolge der vollen Homogenität mancher derartiger Drähte, die gut ausgeglüht waren und trotzdem denselben Effekt ($\mu_k > \mu_n$) zeigten, ausgeschlossen ist. Außerdem muß man bemerken, daß die in der Rechnung benutzten Werte von μ und q' aus der Messung der zirkularen magnetischen Eigenschaften der oberen Drahtschichten ermittelt wurden.¹⁾

Aus dem Dargelegten folgt, daß die hypothetische Inhomogenität der Permeabilität auf dem Drahtquerschnitte in den besprochenen Versuchstatsachen keine wesentliche Rolle spielte. Trotzdem könnte eine etwaige ungleichmäßige Verteilung der magnetischen Eigenschaften im Drahtinnern, die Kristallstruktur oder die Längsritzen, bei Auswertung der Versuchsergebnisse berücksichtigt werden. Man muß aber warten, bis eine Theorie der Fortpflanzung der Drahtwellen erscheint, die eine im voraus gegebene Verteilung der Permeabilität der Tiefe nach voraussetzt.

Zusammenfassung

Nur eine sichere volle Abwesenheit der Hysteresewärme, d. h. der Verspätung der Induktion gegen die Feldstärke, könnte Veranlassung geben, auf die magnetische Leitfähigkeit und auf die Formel (1) zu verzichten. Aber wir haben über diese Verspätung bei Hochfrequenz, auch in dem Gebiete der Anfangspermeabilität, besonders bei meterlangen Wellen, keine negativen Angaben.

Was die Mantelhypothese anbelangt ($\mu_1 = 1$), so widersprechen ihr die meisten der bisher vorhandenen experimentellen Tatsachen. In manchen Fällen aber kann natürlich die etwaige ungleichmäßige Verteilung der Permeabilität auf dem Drahtquerschnitte zur Erklärung einiger Versuchsergebnisse herangezogen werden.

1) J. Antik, a. a. O.

Moskau, Magnetisches Laboratorium, den 25. Juni 1931.

(Eingegangen 28. Juni 1931)

Bemerkungen

zu dem vorstehenden Aufsatz von Hrn. Arkadiew

Von Max Wien

Hr. Arkadiew hat in dem vorstehenden Aufsatz die Untersuchungen von Hrn. Michels und meine Bemerkung dazu kritisch besprochen. Ich muß deshalb nochmals auf die dort behandelten ferromagnetischen Fragen kurz zurückkommen.

Was zunächst die Versuche von Hrn. Michels anbetrifft, so erklärt Hr. A. sie für „auch nicht sicher“, wobei er zur Begründung die Vermutung anführt, daß bei den Michels'schen Versuchen die verschiedene Spannung der Drähte als Fehlerquelle mitgewirkt hätte. Dagegen ist zu erwidern, daß die Drähte bei allen Versuchen in der gleichen Weise ausgespannt blieben, und auch schon aus der geringen Streuung der Versuchsergebnisse auf einen geringen Einfluß derartiger Fehlerquellen geschlossen werden kann. Viel näher liegt, was auch Hr. A. selbst annimmt, daß diese Fehlerquellen bei den Versuchen A.s und seiner Mitarbeiter eine Rolle gespielt haben und z. T. die Ursache der beobachteten Anomalien waren. Aus den Versuchen von Hrn. Michels folgt in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Lavilles, Gutton, Wait, Brickwedde und Hall, schließlich auch besonders mit den ausführlichen Versuchen von Strutt, daß bei Hochfrequenz keine besonderen Anomalien vorhanden sind, und daß die Anfangspermeabilität bis zu Wellenlängen von 10 m herab annähernd den Wert der Permeabilität bei langsamen Schwingungen hat. Weiter ergaben die Versuche eine geringe Abnahme der Permeabilität mit der Wellenlänge, die bei μ_n schneller, bei μ_k langsamer ist; infolgedessen ist bei hoher Frequenz μ_k merklich größer als μ_n .

Hr. A. nimmt zur Erklärung seiner Beobachtungen eine „magnetische Leitfähigkeit“ an, und in Analogie mit der opti-

schen Dispersionstheorie führt er die „magnetische Dispersion“ auf Mitschwingen magnetischer Zentren zurück. Die von A. und anderen beobachteten Anomalien der Permeabilität werden als Wirkung dieser magnetischen Eigenschwingungen aufgefaßt. Hr. A. gibt jetzt selbst die Möglichkeit zu, daß die Anomalien auf den Einfluß der Spannung der Drähte und auf elastische Resonanz, die von der Befestigung der Eisendrähte abhängt, also auf mehr oder weniger zufällige äußere Einwirkungen zurückführbar sind. Danach ist die Einführung der magnetischen Leitfähigkeit nicht mehr durch die innere Natur des Ferromagnetikums bedingt, jedoch ermöglicht sie eine bequeme formale Darstellung der magnetischen Erscheinungen bei Wechselstrom, die sich offenbar schon in vielen Fällen als vorteilhaft erwiesen hat.

In meiner Bemerkung zu der Michelsschen Arbeit habe ich den Versuch gemacht, die Michelsschen Ergebnisse aus einer Abnahme der Permeabilität in den äußersten Oberflächenschichten der Drähte zu erklären, und fußte dabei auf der Theorie von Försterling, die er in seiner Arbeit „Über die Fortpflanzung elektrischer Wellen an einem geraden Metalldraht, der mit einem leitenden Mantel versehen ist“ gebracht hat.

Den Erfolg dieses Erklärungsversuchs stellt Hr. A. doch wohl nicht ganz richtig dar, wenn er schreibt: „In einem Fall gelingt es ihm das zu erreichen — nämlich die Beobachtungsergebnisse durch die Theorie wiederzugeben —, in einem anderen Fall ergibt der Versuch statt einer Verminderung von μ_k eine Vergrößerung der Permeabilität zu den kurzen Wellen“. In Wirklichkeit gibt die Theorie sowohl bei dem elektrolytischen wie bei dem russischen Eisen die Differenz zwischen μ_k und μ_n richtig wieder. Ebenso bei beiden Eisensorten den Anstieg von μ_n mit der Frequenz, der etwa 10 bis 20 Proz. beträgt. Sogar der sehr geringe von der Theorie geforderte Anstieg von μ_k findet sich bei dem Elektrolyteisen in den Michelsschen Werten wieder. Daß schließlich bei dem russischen Eisen das beobachtete μ_n annähernd konstant bleibt, statt um 4—5 Proz. anzusteigen, wie die Theorie es fordert, ist nicht weiter verwunderlich, da diese Differenzen in die Größenordnung der Beobachtungsfehler fallen.

Die weitere Kritik von Hrn. A. bezieht sich auf das

Vorhandensein und die Wirkung der Oberflächenschicht. Daß eine solche vorhanden ist, unterliegt wohl keinem Zweifel, es lehrt das der Augenschein, z. B. das Anlaufen der Oberfläche, vor allem aber die Schwierigkeit, ja Unmöglichkeit, eine „reine“ Oberfläche bei metalloptischen und lichtelektrischen Versuchen herzustellen.

Bei welcher Schichtdicke der Abfall der Leitfähigkeit und der Permeabilität einsetzt, ist natürlich schwer zu sagen, und wird auch im Einzelfall verschieden sein. Er erfolgt sicher bei der Permeabilität früher als bei der Leitfähigkeit.¹⁾ Ich habe deshalb bei meinem Erklärungsversuch die Leitfähigkeit als konstant angenommen, und nur eine Änderung der Permeabilität vorausgesetzt. Es spricht also nicht gegen die Theorie, daß bei Neusilber und Silber, also nicht ferromagnetischen Materialien, die Formeln für den effektiven Widerstand durch die Messungen quantitativ bestätigt werden.

Ebensowenig spricht gegen die Oberflächentheorie die Beobachtung von Hrn. A., daß bei sehr kurzen Wellen immer noch eine Vermehrung der Permeabilität durch Ausglühen erfolgt. Denn auch die Oberflächenschichten können durch Ausglühen relativ an Permeabilität gewinnen. Daß die Zunahme mit der Frequenz kleiner wird und bei einer Wellenlänge von 2,3 cm 20, bei 1,3 cm nur noch etwa 10 Proz. beträgt, spricht eher für die Oberflächentheorie.

Bezüglich der Beobachtung, daß bei Hochfrequenz μ_n kleiner ausfällt als μ_k , weist Hr. A. auf eine Arbeit von Artik hin, nach der bei langsamen Schwingungen und dicken Drähten durch die Hysterese eine Verminderung der Selbstinduktion und eine Vermehrung des Widerstandes erfolgt, so daß hierdurch ebenfalls μ_n kleiner als μ_k ausfällt. Diese Wirkung der Hysterese ist mir wohl bekannt, da ich bereits im Jahre 1894²⁾ derartige Messungen gemacht und besprochen habe.

Ich stimme mit Hrn. A. durchaus darin überein, daß diese Erscheinung mit Oberflächenwirkungen nichts zu tun hat, sondern eben auf Hysterese beruht. Es fragt sich nun, ob der bei Hoch-

1) M. Wien, *Ann. d. Phys.* [5] 8. S. 901. 1931.

2) M. Wien, *Wied. Ann.* 8. S. 929. 1894.

frequenz von Hrn. Michels und anderen beobachtete Unterschied zwischen μ_n und μ_k ebenfalls auf Hysterese beruhen könnte. Nach Rayleigh¹⁾ tritt Hysterese erst auf, wenn μ nicht nur linear mit dem Feld ansteigt, sondern die Kurve sich krümmt. Bei den Versuchen von Strutt, die mit sehr dünnen Drähten und verhältnismäßig großen Stromstärken ausgeführt wurden, ist ein deutliches Ansteigen von μ mit der Feldstärke vorhanden, allerdings keine merkliche Krümmung. Immerhin wäre hier eine schwache Hysterese denkbar, die jedoch schnell mit der Feldstärke sinken müßte. Die Versuche von Michels wurden jedoch mit mindestens 10 mal so kleiner Feldstärke gemacht, so daß die Hysterese verschwindend klein gewesen sein muß. Es wurde auch keine Wirkung der Änderung der Stromstärke festgestellt. Demnach kommt bei seinen Versuchen Hysterese als Grund der Differenz zwischen μ_n und μ_k nicht in Frage.

Nach diesen Ausführungen glaube ich daran festhalten zu können, daß das Verhalten ferromagnetischen Drahtes bei Wechselstrom bis zu Wellenlängen von 5 m herab sich genügend durch die Oberflächentheorie deuten läßt.

Eine andere Frage ist, ob das völlige Verschwinden ferromagnetischer Eigenschaften bei ganz kurzen Wellenlängen ebenfalls auf Oberflächenschichten zurückgeführt werden kann. Ich habe nur die Möglichkeit zur Diskussion gestellt. Hr. A. macht gegen diese Hypothese folgende Einwände:

Hr. A. beobachtete für eine Wellenlänge von etwa 4 cm bei Eisendrähten ein Maximum des Widerstandes und bei noch gesteigerter Frequenz ein Sinken des Widerstandes; und dies hält er für unvereinbar mit der Oberflächentheorie. Abgesehen davon, daß sich dies Sinken vielleicht durch einen starken Abfall der mittleren Permeabilität des Kernes (μ_3) bei sehr hoher Frequenz erklären ließe, so sind doch die Messungen mit Wellenlängen von der Größenordnung von 1 cm bei Funken-erregung so unzuverlässig, daß kaum sichere Schlüsse darauf begründet werden können, ja für jeden, der die Schwierigkeiten derartiger Messungen kennt, ist es erstaunlich und muß als ein

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag., S. 240, March 1887.

Beweis großer Experimentierkunst angesehen werden, daß überhaupt quantitative Ergebnisse erzielt werden konnten. Die verhältnismäßig gute Übereinstimmung dieser Messungen mit den Kurven der Oberflächentheorie scheint mir eher für diese Theorie zu sprechen als dagegen.

Bei welcher Frequenz und Schichtdicke der Abfall von μ auf den Wert 1 erfolgt, ist natürlich schwer zu beurteilen und wird auch in den Einzelfällen verschieden sein. Wenn man trotz ihrer unvermeidlichen Unsicherheit aus den Arkadiewschen Beobachtungen extrapolieren will, so käme man bei Eisen etwa auf eine Wellenlänge von 0,5 cm, was einer Eindringtiefe von etwa $7 \cdot 10^{-6}$ cm entspräche. Bei durchsichtigen zerstäubten Eisenniederschlägen von etwa dieser Dicke sind von Kundt, Maurain und anderen noch ferromagnetische Eigenschaften festgestellt worden. Bei noch dünneren Schichten scheinen jedoch sowohl die Permeabilität als auch die Leitfähigkeit abzunehmen. Der starke Abfall der effektiven Permeabilität infolge der Oberflächenwirkung müßte also bei noch kürzeren Wellen erfolgen. Ein entscheidender Versuch ließe sich an so dünnen Schichten machen, daß der Hauteffekt auch für ganz hohe Frequenzen verschwindend oder wenigstens sicher berechenbar wäre. Wenn die bei ganz hohen Frequenzen unter Berücksichtigung des berechneten Hauteffektes bestimmte Permeabilität wesentlich niedriger ausfällt als die statisch gemessene Permeabilität oder sich gar die Permeabilität 1 ergäbe, so wäre das ein Beweis für ein Nichtfolgen des Magnetismus im Sinne des Hrn. A. Dieser entscheidende Versuch steht aber noch aus.

Wenn bei den bekannten Messungen von Hagen und Rubens mit ultravioletten Wellen bei Eisen die richtige Leitfähigkeit herauskommt, so handelt es sich ja eben nicht um die Permeabilität, sondern um die Leitfähigkeit, die wie gesagt erst bei viel dünneren Oberflächenschichten stärker abzunehmen beginnt. Es müßte also in den Schichten, in welchen die ultraroten Strahlen im wesentlichen reflektiert werden, die Permeabilität schon sehr nahe dem Werte 1 sein, während die Leitfähigkeit noch annähernd normal ist. Hier wäre eine Wiederholung der Hagen- und Rubensschen Versuche mit möglichst langen Wellen erwünscht.

Zur Entscheidung der Frage, ob das Verschwinden des

Ferromagnetismus bei sehr kurzen Wellen an einem „Nichtfolgen“ oder an einem „Nichteindringen“ liegt, sind die bisherigen Versuche nicht ausreichend, und das Problem muß sowohl von der elektrischen wie von der optischen Seite weiter bearbeitet werden. Die Kritik von Hrn. A. hat mich nicht davon überzeugt, daß die Oberflächentheorie fallen gelassen werden muß, und ich möchte sie auch vorläufig nicht fallen lassen, da man nach meiner Ansicht bei neuen Erscheinungen zunächst den Versuch machen muß, sie auf möglichst einfache, ich möchte sagen nüchterne Art zu erklären, ehe man zu besonderen Hypothesen seine Zuflucht nimmt.

Jena, Physikal. Institut der Universität, 25. August 1931.

(Eingegangen 27. August 1931)

üb

der
hoh
in
ha
Lei
ein
geb
der
ma
jed
zun
der
let
zei
die
sch
mi
Ma
jed
die

Ph
S.

vg
W

**Über die Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante
elektrolytischer Lösungen bei Hochfrequenz**

Von Max Wien

(Mit 13 Figuren)

Im folgenden soll über Messungen der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante elektrolytischer Lösungen bei sehr hohen Frequenzen berichtet werden. Diese Messungen sollten in erster Linie zur Prüfung der Debye-Onsager-Falkenhagenschen Theorie der Elektrolyte dienen. Bezüglich der Leitfähigkeit¹⁾ liegen schon mehrfach Untersuchungen vor, die eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ergeben. Jedoch ist es bisher nicht gelungen sichere Messungen der Dielektrizitätskonstante elektrolytischer Lösungen zu machen.²⁾ Die Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit sind jedoch durchaus gleichberechtigt und ihre gleichzeitige Messung zur Prüfung der Theorie und zur weiteren Klärung des Wesens der Elektrolyte sehr wünschenswert. Es wurde deshalb in den letzten Jahren im hiesigen Institut eine Methode zur gleichzeitigen Messung der beiden Größen ausgearbeitet.³⁾ Nach dieser Methode wurden nun systematische Messungen an verschiedenen Lösungen insbesondere von MgSO_4 und $\text{Ba}_3(\text{FeCy}_6)_2$ mit Wellenlängen von 10, 20 und 40 m gemacht. Über diese Messungen soll im folgenden berichtet werden; vorher sollen jedoch, um den Vergleich mit den Versuchen zu erleichtern, die wichtigsten Formeln der Debye-Onsager-Falkenhagen-

1) H. Sack, Physikal. Ztschr. **29**. S. 627. 1928; A. Deubner, Physikal. Ztschr. **30**. S. 946. 1929; H. Rieckhoff, Ann. d. Phys. [5] **2**. S. 5. 1929; B. Brendel, Physikal. Ztschr. **32**. S. 5. 1931.

2) Über die sich stark widersprechenden bisherigen Meßergebnisse vgl. O. Milicka u. A. Slama, Ann. d. Phys. [5] **8**. S. 663. 1931 und W. Orthmann, Ann. d. Phys. [5] **9**. S. 537. 1931.

3) O. Neese, Ann. d. Phys. [5] **8**. S. 929. 1931.

schen Theorie, soweit wir sie brauchen, zusammengestellt werden. Hierbei sind die Formeln für Äquivalentleitfähigkeit und Äquivalentkonzentration an Stelle der molekularen Leitfähigkeit und Konzentration umgerechnet, weil die Versuche sich so bequemer darstellen lassen.

I. Zusammenstellung der theoretischen Formeln

Bezeichnungen

- κ absolute Leitfähigkeit.
- λ Äquivalentleitfähigkeit.
- λ_{∞} Äquivalentleitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung.
- m Äquivalentkonzentration pro Liter.
- D Dielektrizitätskonstante.
- e Elementarquantum.
- k Boltzmannkonstante.
- N Loschmidtsche Zahl.
- η innere Reibung des Lösungsmittels.
- z Wertigkeit der Ionen.

Die Debye-Falkenhagenschen Hilfsgrößen, K_1 (Dicke der Ionenatmosphäre) und q ergeben sich nach Einführung obiger Größen zu:

$$K_1 = 2e \sqrt{\frac{\pi N \cdot m (z_1 + z_2)}{k T D \cdot 1000}}, \quad q = \frac{z_1 z_2 (l_1 + l_2)}{(z_1 + z_2) (z_2 l_1 + z_1 l_2)} \quad (l_1 \text{ und } l_2 \text{ Beweglichkeiten}).$$

Die Äquivalentleitfähigkeit λ wird mit steigender Konzentration aus drei Ursachen gegenüber der Äquivalentleitfähigkeit für die Verdünnung (λ_{∞}) verkleinert:

$$\lambda = \lambda_{\infty} - \lambda_I - \lambda_{II} - \lambda_{III}.$$

λ_I ist der „Relaxationseffekt“ und rührt von der Ionenverteilung her. λ_{II} ist der „elektrophoretische“ Effekt und rührt von der Änderung der Reibung infolge der Ionen her. λ_I und λ_{II} kann man zusammen den „Ionenkonzentrationseffekt“ nennen. λ_{III} ist die Verminderung der Leitfähigkeit wegen ungenügender Ionisation der Lösung. λ_{III} ist bei verdünnten Lösungen starker Elektrolyte = 0 zu setzen.

Der relative Relaxationseffekt ist unter Einführung obiger Größen:

$$(1) \quad \frac{\lambda_I}{\lambda_{\infty}} = - \frac{19,72 z_1 z_2 (z_1 + z_2)^{1/2} \cdot q}{(D T)^{1/2} (1 + \sqrt{q})} \cdot \sqrt{m}.$$

Der elektrophoretische Effekt:

$$(2) \quad \frac{\lambda_{II}}{\lambda_{\infty}} = - \frac{29,0 \cdot (z_1 + z_2)^{3/2}}{\eta (DT)^{1/2} \lambda_{\infty}} \cdot \sqrt{m}.$$

Zusammen geben $\frac{\lambda_I + \lambda_{II}}{\lambda_{\infty}}$ den „Ionenkonzentrationseffekt“:

$$(3) \quad \frac{\lambda_I + \lambda_{II}}{\lambda_{\infty}} = - \left(\frac{19,72 \cdot z_1 z_2 (z_1 + z_2)^{1/2} \cdot q}{(DT)^{1/2} (1 + \sqrt{q})} + \frac{29,0 \cdot (z_1 + z_2)^{3/2}}{\eta (DT)^{1/2} \lambda_{\infty}} \right) \sqrt{m},$$

mithin das „Wurzelgesetz des Konzentrationseffektes der Leitfähigkeit“, oder für symmetrische Elektrolyte und die Temperatur $T = 293^\circ$:

$$(3a) \quad \frac{\lambda_I + \lambda_{II}}{\lambda_{\infty}} = - \left(\frac{164,6 \cdot z^{3/2}}{D^{1/2}} + \frac{4,8 \cdot z^{3/2}}{D^{1/2} \cdot \eta \cdot \lambda_{\infty}} \right) \sqrt{m}.$$

Für die Dielektrizitätskonstante ergibt sich entsprechend das „Wurzelgesetz der Dielektrizitätskonstante“:

$$(4) \quad \frac{\Delta D}{D} = \frac{D_{\infty} - D}{D} = 397 \cdot \frac{z_1 z_2 (z_1 + z_2) \sqrt{q}}{D^{3/2} \cdot 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}} \right)^2} \cdot \sqrt{m}$$

und für symmetrische Elektrolyte

$$(4a) \quad \frac{\Delta D}{D} = \frac{33,7 \cdot z^{3/2}}{D^{3/2}} \cdot \sqrt{m}.$$

Die Widerstandsmessung mit Niederfrequenz ergibt in der bekannten Weise λ , und wenn man λ_{∞} extrapoliert,

$$\lambda_I + \lambda_{II} + \lambda_{III} = \lambda_{\infty} - \lambda.$$

Wenn man $\lambda_I + \lambda_{II}$ nach den obigen Formeln berechnet, so erhält man λ_{III} und damit den wahren „Dissoziationsgrad“.¹⁾ Man kann die Ionenkonzentration m_i und damit den wahren Dissoziationsgrad auch messen, indem man die Dielektrizitätskonstanteänderung ΔD mißt und m_i aus Formel (4) oder (4a) berechnet. Bei Niederfrequenz ist die Messung von D bei irgend besserer Leitfähigkeit schwierig. Auch die interessante Methode von Fürth²⁾ scheint nicht zum Ziel zu führen. Ich komme unten darauf zurück. Bei Hochfrequenz kommt, wie sogleich besprochen werden soll, als Komplikation der Zeiteffekt hinzu.

1) W. Nernst, Berl. Ber. vom 19. 1. 1928.

2) R. Fürth, Ztschr. f. Phys. 22. S. 98. 1924; 44. S. 256. 1927.

Die Änderung der Dielektrizitätskonstante $\Delta D/D$ ist mit dem Relaxationseffekt λ_1/λ_∞ einfach zahlenmäßig verknüpft. Es ist für symmetrische Elektrolyte

$$(5) \quad \frac{\Delta D}{D} = 0,207 \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}.$$

Man könnte also bei starken, völlig dissoziierten Lösungen λ_1 aus dem gemessenen $\Delta D/D$ berechnen und damit λ_1 und λ_∞ einzeln experimentell bestimmen.

Hochfrequenz

Bei Hochfrequenz tritt zu dem Relaxationseffekt der Leitfähigkeit λ_1 und zu der Änderung der Dielektrizitätskonstante ΔD noch je ein Faktor $f_1(\Theta)$ und $f_2(\Theta)$, der „Zeiteffekt“ hinzu, der von wesentlichem Einflusse ist. Er bewirkt die „Dispersion“ der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante. Zur Ausrechnung dieses Faktors haben Debye-Falkenhagen Tabellen angegeben. Für die Relaxationszeit Θ geben sie den Ausdruck: $\Theta = \frac{q_1 q_2}{q_1 + q_2} \frac{1}{k T K_1^2}$ worin q_1 und q_2 Reibungsgrößen der Ionen sind. Dieser Ausdruck läßt sich, wie Hr. Dr. Possner-Jena bei einer Zusammenstellung der Formeln feststellte, nach Einführung der Werte für die Hilfsgrößen in folgende Form bringen:

$$(6) \quad \Theta = 8,85 \cdot 10^{-11} \frac{D}{m \cdot \lambda_\infty}.$$

λ_∞ würde die Leitfähigkeit der Lösung sein, wenn jedes Ion sich für sich wie bei unendlicher Verdünnung bewegen würde. Setzen wir $m \lambda_\infty = \kappa_\infty \cdot 1000$, so wird

$$(6a) \quad \Theta = 8,85 \cdot 10^{-14} \frac{D}{\kappa_\infty},$$

also ist die Relaxationszeit gleich einem Zahlenfaktor mal dem Quotient aus Dielektrizitätskonstante durch Leitfähigkeit ohne Ionenwolken, mithin gleich dem Quotient aus Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels durch Leitfähigkeit bei der Frequenz ∞ .

Um den Zeiteffekt zu charakterisieren, sind in den Figg. 1 und 2 die Änderungen der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante für Lösungen von MgSO_4 mit der Konzentration für die Wellenlängen 100, 10, 1, 0,1 Meter berechnet. Als Abszisse ist in beiden Figuren die Wurzel aus der Äquivalentkonzentration \sqrt{m} eingetragen; als Ordinaten die relativen

Änderungen der Leitfähigkeit bzw. der Dielektrizitätskonstante in Prozenten von λ_∞ bzw. D . In der Fig. 1 würde die schräge ausgezogene Gerade ($l = \infty$) der Leitfähigkeit, wie sie nach der Kohlrauschschen Methode mit langsamen Schwingungen bestimmt wird entsprechen, sie gibt also das Wurzelgesetz für den Relaxationseffekt λ_1 wieder. Für $l = 0$,

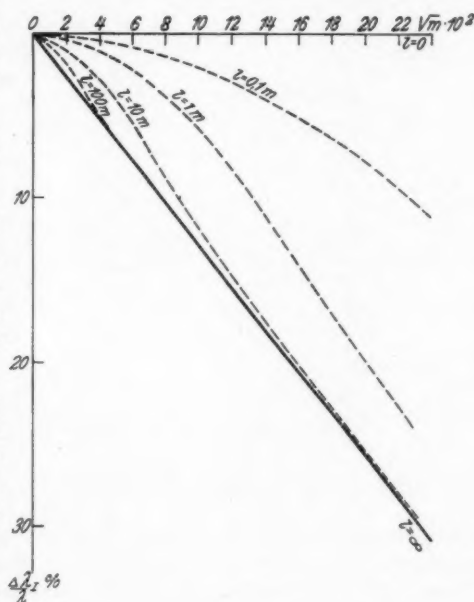
also unendlich schnelle Schwingungen, wird für alle Konzentrationen der Relaxationseffekt $= 0$, die Linie fällt mit der Abszissenachse zusammen.

Zwischen diesen beiden Grenzgraden liegen die Werte der Leitfähigkeit für Hochfrequenz, die als gestrichelte Kurven für $l = 100, 10, 1, 0,1$ Meter einge-

zeichnet sind. Für die Wellenlänge 100 Meter ist die

Abweichung von der Gerade $l = \infty$ sehr klein, die Erhöhung der Leitfähigkeit nimmt aber von $l = 10$ Meter ab schnell zu.

Die Fig. 2 zeigt für den Zeiteffekt bei der Dielektrizitätskonstante ein analoges Bild. Für $l = 0$ erhalten wir wieder überall die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels, also fällt die Gerade mit der Abszissenachse zusammen; für $l = \infty$ erhalten wir die schräge ausgezogene Gerade, die dem Wurzelgesetz der Dielektrizitätskonstante entspricht. Dazwischen liegen

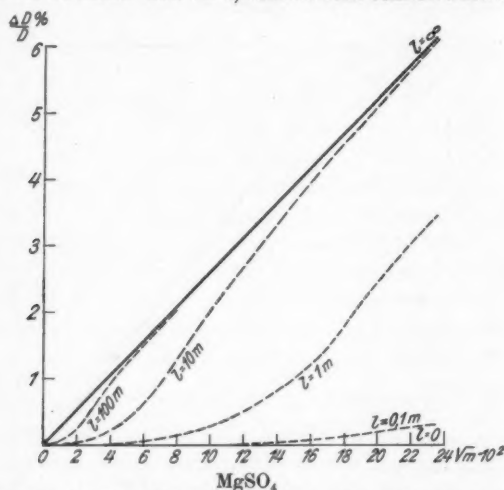


MgSO₄

Änderung der Leitfähigkeit mit der Konzentration
für $l = 100, 10, 1, 0,1$ Meter

Fig. 1

die gestrichelt gezeichneten Kurven für Hochfrequenz. Die Kurve für $l = 100$ Meter weicht wieder nur wenig von der Geraden $l = \infty$ ab, der Zeiteffekt ist noch sehr klein, um zwischen $l = 10$ Meter und $l = 0,1$ Meter sehr schnell anzuwachsen.



Änderung der Dielektrizitätskonstante mit der Konzentration
für $l = 100, 10, 1, 0,1$ Meter

Fig. 2

Diese letzte Kurve schließt sich schon sehr nahe an die Abszissenachse an. In diesem Bereich zwischen $l = 10$ und $0,1$ Meter haben wir also für die Dielektrizitätskonstante eine recht erhebliche Dispersion.

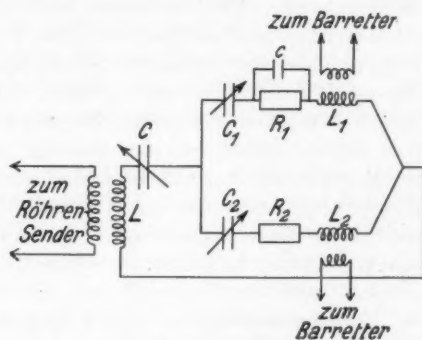
Der Messung zugänglich ist einmal bei der Leitfähigkeit die Summe von $\lambda_1 + \lambda_{II} + \lambda_{III}$. Durch die Hochfrequenzmessung erhalten wir den Abstand zwischen der Geraden $l = \infty$ und der betreffenden gestrichelten Kurve, also $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cdot f_1(\Theta)$. Bei der Dielektrizitätskonstante ist, wie gesagt, bisher eine Messung bei langsamen Schwingungen nicht möglich. Wir können also nur die Erhöhung ΔD der Dielektrizitätskonstante gegen die des Lösungsmittels (D) messen, jedoch multipliziert mit dem Zeiteffekt $f_2(\Theta)$, d. i. der Abstand der gestrichelten Kurven von der Abszissenachse.

II. Methode und Versuchsanordnung

Grundlagen der Methode

Die Methode war die Barrettermethode, über die schon mehrfach berichtet wurde, insbesondere auch von O. Neese¹⁾ in ihrer Anwendung auf elektrolytische Messungen. Ich kann mich daher unter Hinweis auf diese Arbeiten kurz fassen. Die allgemeine Anordnung ist aus Fig. 3 ersichtlich. Es wird ein Hochfrequenzstrom in einem Schwingungskreis erzeugt, der sich in einen Meßzweig 1 und einen Vergleichszweig 2 teilt. Die Gleichheit dieser beiden Zweige wird mit einer Barretteranordnung festgestellt.

In dem Meßzweig befindet sich die Flüssigkeitszelle, die wie ein Widerstand R_1 mit parallel geschalteter Kapazität c wirkt. Die Messung beruht darauf, daß in dem Meßzweig mittels des Kondensators C_1 die Selbstinduktion des Zweiges kompensiert wird, so daß im Barrettergalvanometer ein Maximalausschlag α_m entsteht. Bei der Änderung von C_1 entsteht eine Resonanzkurve, aus deren Lage und Höhe auf die Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante der Flüssigkeit geschlossen werden kann. Ändert sich eins von beiden oder beides, so ändert sich die Resonanzkurve nach Lage und Höhe (vgl. Fig. 4).



Barretteranordnung

Fig. 3

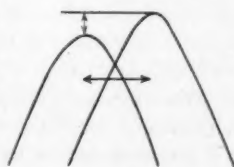
Veränderung
der Resonanzkurve

Fig. 4

1) O. Neese, a. a. O.

Bei den ersten Anwendungen der Barreteranordnung zur Messung des Spannungseffektes wurden kurze, stark gedämpfte Stromstöße verwandt. Hr. Neese brauchte zur Durchführung seiner Methode schwach gedämpfte Stromstöße, die er durch Löschfunken unter Zwischenschaltung eines wenig gedämpften Kreises erzielte. Die Stromstöße haben den Vorzug einer sehr konstanten, immer wieder herstellbaren Energie, jedoch ist die mit ihnen erreichbare Empfindlichkeit wegen ihres sehr schnellen Ablaufs nicht allzu groß. Ich habe deshalb bei den folgenden Versuchen ungedämpfte Schwingungen, die mittels eines Röhrensenders erzeugt wurden, benutzt, wodurch man die Empfindlichkeit der Methode außerordentlich steigern kann; andererseits hat man dabei den Nachteil, daß es schwierig ist, den Strom längere Zeit völlig konstant bezüglich Frequenz und Amplitude zu halten. Ich komme hierauf weiter unten zurück.

Bei der Ausführung der Methode blieb der Vergleichszweig ungeändert und die ganze Messung geschah in dem Meßzweig. Bei nicht allzu hoher Frequenz kann in folgender Weise eine *absolute* Messung der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante ausgeführt werden.

Es wird die Flüssigkeitszelle mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und die Resonanzkurve aufgenommen. Darauf wird die Lösung durch das reine Lösungsmittel, z. B. destilliertes Wasser, ersetzt; ein Widerstand und ein kleiner Hilfskondensator werden der Flüssigkeitszelle parallel geschaltet und so lange abgeändert, bis die gleiche Resonanzkurve entsteht. Der Wert des parallel geschalteten Widerstandes und der Wert der Hilfskapazität geben dann die gesuchten Änderungen der Leitfähigkeit und der Dielektrizitätskonstante.

Bei sehr hohen Frequenzen treten jedoch hier Schwierigkeiten auf. Einmal sind die unvermeidlichen Zuführungen zu dem parallel geschalteten Widerstand und der Kapazität Fehlerquellen (vgl. O. Neese, a. a. O.). Ferner wird auch durch derartige Parallelzweige die Potentialverteilung im Meßzweig, die nach unserer Voraussetzung gleichbleiben soll, merklich geändert. Durch Verwendung sehr dicker kurzer Zuleitungsdrähte und von Hochfrequenzwiderständen ¹⁾ wurden

1) Vgl. M. Wien, Jahrb. d. Tel. 37. S. 169. 1931.

diese Fehlerquellen vermindert, jedoch gelang es nicht, bei Wellenlängen von 10—20 Metern die Fehler unter 1—2 Proz. herunterzudrücken. Dies reicht schon an die Größenordnung des zu messenden Effektes heran; es wurde daher von den absoluten Messungen abgesehen und nur Vergleichsmessungen an verschiedenen Lösungen gemacht, wobei als Vergleichsflüssigkeiten HCl- und NaCl-Lösungen dienten, bei denen wegen der niedrigen Wertigkeit der Ionen die zu erwartenden Effekte besonders klein waren. Diese Effekte wurden nach der Theorie berechnet und zu den gemessenen Differenzen hinzugefügt.

Es bestand demnach die Messung darin, daß in der Flüssigkeitszelle des Meßzweiges die zu untersuchende Lösung mit einer NaCl- oder HCl-Lösung ausgetauscht wurde. Dabei mußte, wie erwähnt, der Meßzweig bezüglich seiner Kapazität, Selbstinduktion, Widerstand und Potentialverteilung ungeändert bleiben. War dies der Fall, so blieb die Resonanzkurve nach Lage und Höhe ungeändert. Wenn bei Ersatz der einen Flüssigkeit durch die andere eine Änderung der Dielektrizitätskonstante oder der Leitfähigkeit gegenüber der Vergleichslösung eintrat, so machte sich diese durch Verschiebung der Resonanzkurve und Änderung des Maximalausschlages kenntlich. Die Messung erfolgte nun so, daß diese Änderung durch Veränderung der Leitfähigkeit und Kapazität der mit der zu untersuchenden Lösung gefüllten Flüssigkeitszelle wieder rückgängig gemacht, also kompensiert wurde. Bei der Leitfähigkeit geschah das einfach dadurch, daß die Konzentration der Lösung ein wenig geändert wurde. Die Differenz der Widerstände und damit der zu messende Effekt bei der Leitfähigkeit wurde dann mit der Kohlrauschschen Brücke festgestellt. Eine Änderung der Dielektrizitätskonstante hätte man auch z. B. durch Hinzufügung von etwas Alkohol kompensieren können; jedoch hätte man damit wieder gleichzeitig eine Veränderung der Leitfähigkeit verursacht, und ferner einen zu weit gehenden Eingriff in die Natur der zu untersuchenden Lösung gemacht. Es mußte daher die Kompensation der Dielektrizitätskonstante durch einen Kondensator im Nebenschluß geschehen. Dazu durfte man aber nicht einen variablen Luftkondensator verwenden wegen der un-

vermeidlichen Selbstinduktion der Zuführungen, sondern es wurde eine weitere Flüssigkeitszelle benutzt, die, wie aus Figg. 5 und 5a ersichtlich, unmittelbar mit der eigentlichen Flüssigkeitszelle zusammengeschmolzen war. Die Platindrähte, die zur Elektrode der Hauptzelle führten, wurden zugleich in die Nebenzelle eingeführt und bildeten dort die Elektroden der Nebenzelle. Die Selbstinduktion dieser kurzen Drähte war

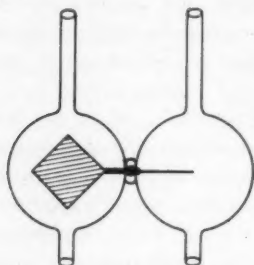
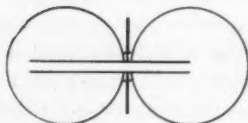


Fig. 5 Ansicht

Fig. 5a Aufsicht
Meßgefäß

verschwindend. In diese Nebenzelle wurden Mischungen von reinem Alkohol und reinem Wasser gebracht, und durch Änderung des Mischungsverhältnisses konnte die Kapazität der Nebenzelle und damit die Gesamtkapazität verändert werden. Eine vorhandene Abweichung der Dielektrizitätskonstante der zu untersuchenden Lösung konnte so durch Veränderung des Mischungsverhältnisses von Wasser-Alkohol in der Nebenzelle kompensiert und so die Gesamtkapazität wieder auf den gleichen Wert mit derjenigen der Normalflüssigkeit gebracht werden. Da nun die Dielektrizitätskonstante der Wasser- und Alkohollösungen in ihrer Ab-

hängigkeit von dem Gehalt und ihrem spezifischen Gewicht bekannt war, so konnte aus der Beobachtung des spezifischen Gewichtes der Mischung mittels der Mohrschen Waage auf die Änderung der Kapazität des Nebenkondensators und aus dieser auch die Änderung der Dielektrizitätskonstante der zu untersuchenden Lösung geschlossen werden. Bei den meisten Messungen wurde ein Gefäß verwandt, bei dem die Hauptzelle Elektroden von $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$ -Fläche besaß; ihr Abstand betrug etwa 0,4 cm, ihre Kapazität war bei Wasserfüllung 142 cm. Die Elektroden der Nebenzelle bestanden aus etwa 1,5 cm langen Drähten, ihre Kapazität betrug bei Wasserfüllung 18,7 cm, bei Füllung mit Äthylalkohol 6 cm, durch Änderung des Mischungsverhältnisses von Wasser und Alkohol

konnte mithin die Kapazität um 12,7 cm verändert werden, demnach eine Änderung der Dielektrizitätskonstante der Lösung um etwa 9 Proz. kompensiert und gemessen werden.

Auf diese Weise können die Änderungen der Dielektrizitätskonstante und die der Leitfähigkeit gleichzeitig bestimmt werden, vorausgesetzt, daß es gelingt, die Resonanzkurven ganz gleich zu machen. Dies ist jedoch wegen der gleich zu besprechenden Fehlerquellen nicht mit Sicherheit möglich, und bei den Vergleichsmessungen bleibt schließlich eine kleine Abweichung der Resonanzkurven übrig. Diese muß dann besonders ausgewertet werden und schließlich als Korrektion zu den „rohen“ Meßwerten, wie sie sich aus der angenäherten Kompensation ergeben, hinzugefügt werden. Wie dies geschieht, soll weiter unten an einem Beispiel erläutert werden.

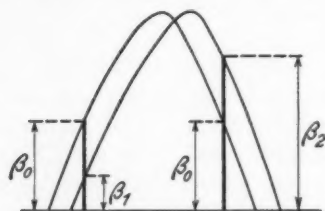
6 Fehlerquellen

Die wichtigsten Fehlerquellen waren Inkonzanz des Röhre senderstromes und Temperatureinflüsse. Um den Röhre sender möglichst konstant zu halten, wurde vor allem der Heizstrom genau kontrolliert und zwar, indem zu einem Widerstand eine Parallelschaltung gemacht wurde, in dem ein Normalelement und ein kleines Zeigergalvanometer sich in Kompensationsschaltung befanden. Auf diese Weise konnte der Strom, welcher etwa 5,2 Amp. betrug, auf Bruchteile von 1 Promille konstant erhalten werden. Trotzdem waren noch kleine Schwankungen der ganzen Anordnung vorhanden, die wohl einmal in den Röhren lagen, zum Teil aber auch in dem Barretter, der sich mit der Zeit etwas änderte, insbesondere wohl infolge von Temperaturschwankungen des Raumes, die sich bei der Dampfheizung des Jenaer Instituts nicht ganz vermeiden ließen. Im ganzen machten sich diese Änderungen durch einen langsamen Gang in den Ausschlägen bemerklich.

Besonders störend war die Schwankung der Temperatur des Elektrolyten. Bei den kurzen Wellenlängen konnte nicht in der Art gearbeitet werden, daß das Meßgefäß sich in einem Thermostaten befand, in dem sich die Temperatur langsam ausglich, sondern das Gefäß befand sich in freiem Raume, so daß Temperaturschwankungen des Raumes sogleich auch auf

den Elektrolyten wirkten. Außerdem bewirkte der Hochfrequenzstrom selbst eine Erwärmung des Elektrolyten. Diese wurde dadurch vermindert, daß die Stromstärke des Hochfrequenzstromes und seine Dauer sehr herabgesetzt wurden. Bei der sehr großen Empfindlichkeit der Barrettermethode konnte das ohne wesentliche Beeinträchtigung der Meßgenauigkeit geschehen. Der Strom wurde immer nur so lange geschlossen, bis der Galvanometeraus Schlag sein Maximum erreicht hatte, also 2—3 Sek.

Zur Verringerung dieser Fehler wurde ferner so schnell als möglich gearbeitet, und die Messung mit den zu vergleichenden Elektrolyten mehrfach abwechselnd gemacht. Um dies erreichen zu können, wurde schließlich davon abgesehen,



Resonanzkurve-Seitenausschläge

Fig. 6

eine bestimmte Einstellung des Kondensators C_1 rechts und links vom Maximum zunächst annähernd gleiche Ausschläge β_0 (Fig. 6) hergestellt und dann der Ausschlag im Maximum α_m abgelesen. War bei der anderen Flüssigkeit eine kleine Abweichung vorhanden, so machte sich diese bemerkbar durch Änderung der Differenz der beiden Seitenausschläge $\Delta(\beta_2 - \beta_1) = \Delta\beta$ (vgl. Fig. 6) oder eine Änderung des Maximalausschlages $\Delta\alpha_m$.

Eichung der Barretteranordnung

Um die so beobachteten Veränderungen der Resonanzkurve $\Delta\beta$ und $\Delta\alpha_m$ auswerten zu können, mußten die Ausschläge durch absichtliche, bekannte Änderungen von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante der Zelle geeicht werden. Die relative Änderung des Widerstandes der Zelle $\frac{\Delta R}{R} = \rho$ und der Dielektrizitäts-

vollständige Resonanzkurven aufzunehmen, sondern es wurde, nachdem der richtige Widerstand ungefähr erreicht war und auch die richtige Mischung von Alkohol und Wasser im Nebengefäß ausprobiert war, die Meßreihe auf die einfachsten und kürzesten Beobachtungen reduziert und zwar wurde für je

konstante $\frac{\Delta D}{D} = \gamma$ erzeugen eine Veränderung von α_m um $\Delta \alpha$ und von $\beta_2 - \beta_1$ um $\Delta \beta$ und es läßt sich $\Delta \alpha$ und $\Delta \beta$ darstellen als

$$(7) \quad \Delta \alpha = A \varrho + \alpha \gamma, \quad \Delta \beta = B \varrho + b \gamma.$$

Ändert man nun den Widerstand um einen bekannten Betrag ϱ_0 , während D ungeändert bleibt, also $\gamma = 0$ ist, und beobachtet man dabei die Änderungen $\Delta \alpha_e$ und $\Delta \beta_e$, so ist:

$$A = \frac{\Delta \alpha_e}{\varrho_0}, \quad B = \frac{\Delta \beta_e}{\varrho_0}.$$

Ändert man anderseits die Dielektrizitätskonstante um einen bestimmten Betrag γ_0 , während $\varrho = 0$ ist, und beobachtet man $\Delta \alpha_\gamma$ und $\Delta \beta_\gamma$, so ist:

$$a = \frac{\Delta \alpha_\gamma}{\gamma_0} \quad \text{und} \quad b = \frac{\Delta \beta_\gamma}{\gamma_0}.$$

Damit ist die Anordnung geeicht, denn, wenn man jetzt $\Delta \alpha$ und $\Delta \beta$ für die zu vergleichenden Lösungen beobachtet hat, so kann man ϱ und γ daraus berechnen, da A, B, a, b durch die soeben besprochene Auswertung bekannt sind.

Beispiel einer Versuchsreihe

MgSO₄ gegen NaCl, $\kappa = 1,9 \cdot 10^{-4}$, $l = 10$ Meter

Um eine angenäherte Übereinstimmung der Resonanzkurven nach Höhe und Lage zu erzielen, mußte der Widerstand der MgSO₄-Lösung um 1,24 Proz. größer gemacht werden, als derjenige der NaCl-Lösung. Die Dielektrizitätskonstante war jedoch bei beiden Lösungen annähernd gleich, so daß im Nebengefäß bei beiden Lösungen destilliertes Wasser genommen wurde. Die „rohe“ Messung ergibt hiernach MgSO₄ gegen NaCl

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)' = -1,24 \text{ Proz.}, \quad \left(\frac{\Delta D}{D}\right)' = 0.$$

Dies gibt aber noch keine genaue Übereinstimmung; um die noch nötige Korrektur zu messen, wurde durch mehrfachen, möglichst schnellen Austausch der beiden Lösungen $\Delta \alpha$ und $\Delta \beta$ gemessen. Vor und nach jeder Hochfrequenzmessung einer Lösung wurde ihr Widerstand nach der Kohlrauschschen Methode bestimmt. Der Mittelwert der so gemessenen Differenzen zwischen NaCl und MgSO₄ gab den genauen Wert von $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)'$. Die Tabellen 1 und 2 geben die Beobachtungen für

$\Delta\beta$ und $\Delta\alpha_m$. Die Abwindungen von β und α_m bei der gleichen Lösung sind z. T. den kleinen unverwindlichen Änderungen des Widerstandes zuzuschreiben.

Tabelle 1
Bestimmung von $\Delta\beta$ aus den Seitenausschlägen β_1 und β_2

Lösung	β_1 ($C_1 = 85^\circ$)	β_2 ($C_1 = 89,5^\circ$)	$\beta_2 - \beta_1$
NaCl	3,5	17,5	14,0
MgSO ₄	6,1	11,8	5,8
NaCl	2,5	14	11,5
MgSO ₄	2,7	8,2	5,5
NaCl	1,7	14,2	12,5
Mitte NaCl: 12,7		Mitte MgSO ₄ : 5,7	$\Delta\beta = -7,0$

Tabelle 2
Bestimmung von $\Delta\alpha_m$

Lösung	α_m	
NaCl	15,5	Mitte NaCl: 17,8
MgSO ₄	20,5	Mitte MgSO ₄ : 19,2
NaCl	19,0	$\Delta\alpha = +1,4$
MgSO ₄	18,0	
NaCl	19,0	

Nun mußte in der oben besprochenen Weise durch eine bekannte Änderung des Widerstandes ϱ_0 und der Kapazität γ_0 der Flüssigkeitszellen die Anordnung geeicht werden (Formeln, S. 441). Die Eichung geschah in folgender Art:

Für $\varrho_0 = +1,8$ Proz., $\gamma_0 = 0$ wurde beobachtet:

$$\Delta\alpha_e = +18,5 \text{ Skalenteile,}$$

Hieraus

$$\Delta\beta_e = -16 \text{ Skalenteile.}$$

$$A = \frac{\Delta\alpha_e}{\varrho_0} = \frac{18,5}{0,018} = 1,03 \cdot 10^3,$$

$$B = \frac{\Delta\beta_e}{\varrho_0} = -\frac{16}{0,018} = -0,89 \cdot 10^3.$$

Für $\varrho_0 = 0$, $\gamma_0 = 1,5$ Proz. wurde beobachtet: $\Delta\alpha_\gamma = +24$,

Hieraus:

$$\Delta\beta_\gamma = -51.$$

$$a = \frac{\Delta\alpha_\gamma}{\gamma_0} = \frac{24}{0,015} = 1,6 \cdot 10^3,$$

$$b = \frac{\Delta\beta_\gamma}{\gamma_0} = -\frac{51}{0,015} = -3,4 \cdot 10^3.$$

Beobachtet man nun bei der eigentlichen Messung $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$, so folgt für ϱ und γ aus den obigen Gleichungen (7) (S. 441).

$$\varrho = \frac{b \Delta\alpha - a \Delta\beta}{Ab - Ba}, \quad \gamma = \frac{A \Delta\beta - B \Delta\alpha}{Ab - Ba}.$$

Die Zahlen des obigen Beispiels für Ab eingesetzt, werden:

$$\varrho = (1,65 \Delta\alpha + 0,75 \Delta\beta) 10^{-3}, \quad \gamma = -(4,7 \Delta\alpha + 4,3 \Delta\beta) 10^{-4}.$$

In der obigen Versuchsreihe hatten wir als Schlußkorrektion gefunden: $\Delta\alpha = 1,4$, $\Delta\beta = -7,0$. Dies gibt

$$\varrho = (2,3 - 5,2) 10^{-3} = -2,9 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma = (-6,7 + 30,3) 10^{-4} = +2,4 \cdot 10^{-3}.$$

Diese Korrekturen müssen zur „rohen“ Messung

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)' = -1,24 \text{ Proz.}, \quad \left(\frac{\Delta D}{D}\right)' = 0,$$

hinzugefügt werden und schließlich noch der theoretisch berechnete Effekt für die Vergleichsflüssigkeit NaCl ($-0,39$ Proz. bei $\frac{\Delta R}{R}$ und $+0,04$ Proz. bei $\frac{\Delta D}{D}$) addiert werden:

$$\frac{\Delta R}{R} = -1,24 \text{ Proz.} - 0,29 \text{ Proz.} - 0,39 \text{ Proz.} = \underline{\underline{-1,9 \text{ Proz.}}}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = +0,24 \text{ Proz.} + 0,04 \text{ Proz.} = \underline{\underline{+0,3 \text{ Proz.}}}$$

In den meisten anderen Fällen war die Differenz der Dielektrizitätskonstante größer und es mußte ein erheblicher Zusatz von Alkohol zu dem destillierten Wasser des Nebengefäßes gemacht werden, um die Kurven einander nahezubringen. Z. B.: $\text{Ba}_3(\text{FeCy}_6)_2$, $l = 10 \text{ m}$, $m = 0,138$. Dielektrizitätskonstante der Wasser-Alkoholmischung $D = 58$, das entspricht einer Zunahme der Dielektrizitätskonstante der Lösung $\left(\frac{\Delta D}{D}\right)' = 3,7$ Proz. $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)'$ war $= -1,5$ Proz. Hieraus mit den Korrekturen für Restausschläge und für NaCl:

$$\frac{\Delta D}{D} = +3,7 \text{ Proz.} + 0,36 + 0,5 = 4,6 \text{ Proz.},$$

$$\frac{\Delta R}{R} = -1,5 \text{ Proz.} + 0,25 - 0,10 = -1,4 \text{ Proz.}$$

Um einige Angaben über die Genauigkeit der Messungen zu machen, so schätze ich die Fehler bei der Widerstandsmessung auf etwa 2—3 Promille; bei sehr großen und sehr kleinen Leitfähigkeiten sind sie etwas größer: etwa 3 bis 4 Promille. Die Messung der Dielektrizitätskonstante war naturgemäß bei schlechter Leitfähigkeit der Lösungen genauer als bei gut leitenden Lösungen. Ich schätze die Genauigkeit bei sehr verdünnten Lösungen auf etwa 2 Promille, bei den bestleitenden, die ich untersucht habe, $\kappa = 3 \cdot 10^{-3}$ zu $\frac{1}{2}$ Proz.

Je kürzer die Wellenlänge ist, um so schwieriger wird die Widerstandsmessung, während auf der anderen Seite die Dielektrizitätskonstante genauer gemessen werden kann. Bei dem Übergang zu Wellenlängen von der Größenordnung von 1 m, den wir jetzt durchzuführen suchen, wird daher die Leitfähigkeit einige Schwierigkeiten bereiten, während die Messung der Dielektrizitätskonstante wohl genau genug sein wird.

III. Meßergebnisse

Es wurden Messungen an einer großen Reihe von Lösungen gemacht. Systematisch untersucht wurden MgSO_4 - und $\text{Ba}_3(\text{FeCy}_6)_2$ -Lösungen gegen NaCl, weil bei diesen Salzen mit hochwertigen Ionen die Effekte besonders groß und daher am besten beobachtbar sind. Die Messung wurde mit den Wellenlängen $l = 10, 20$ und 40 m gemacht, die Konzentration wurde etwa von $m = 5 \cdot 10^{-4}$ bis $5 \cdot 10^{-2}$, also auf das etwa 100 fache gesteigert. In den folgenden Tabellen sind einige Meßergebnisse zusammengestellt.

Tabelle 3
 MgSO_4 . Leitfähigkeit

κ	$m \cdot 10^3$	$\sqrt{m} \cdot 10^3$	$l = 10$ m		$l = 20$ m		$l = 40$ m	
			beob. in ‰	ber. in ‰	beob. in ‰	ber. in ‰	beob. in ‰	ber. in ‰
$4,75 \cdot 10^{-3}$	0,48	2,2	1,5	1,9	1,4	1,5	1,0	1,2
$9,5 \cdot 10^{-3}$	0,90	3,0	1,5	2,1	—	1,6	—	1,0
$1,9 \cdot 10^{-2}$	1,94	4,7	1,9	2,3	1,2	1,4	0,6	0,7
$3,8 \cdot 10^{-2}$	4,36	6,6	1,7	2,0	—	1,0	—	0,3
$7,6 \cdot 10^{-2}$	10,0	10,0	1,1	1,1	0,7	0,4	0,2	0,1
$1,5 \cdot 10^{-1}$	24,3	15,6	0,9	0,5	0,35	0,1	—	0,0
$3,0 \cdot 10^{-1}$	53,2	23,1	0,4	0,2	—	0,0	—	0,0

Tabelle 4

MgSO₄. Dielektrizitätskonstante

κ	$m \cdot 10^3$	$\sqrt{m} \cdot 10^3$	$l = 10 \text{ m}$		$l = 20 \text{ m}$		$l = 40 \text{ m}$		$l = \infty$
			beob. in %	ber. in %	beob. in %	ber. in %	beob. in %	ber. in %	ber. in %
$4,75 \cdot 10^{-5}$	0,48	2,2	-0,1	0,0	0,05	0,05	0,00	0,12	0,57
$9,5 \cdot 10^{-5}$	0,90	3,0	+0,1	0,1	—	0,18	—	0,33	0,78
$1,9 \cdot 10^{-4}$	1,94	4,7	0,3	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	1,15
$3,8 \cdot 10^{-4}$	4,36	6,6	0,8	0,8	—	1,2	—	1,5	1,72
$7,6 \cdot 10^{-4}$	10,0	10,0	1,4	2,0	2,0	2,4	2,0	2,5	2,61
$1,5 \cdot 10^{-3}$	24,3	15,6	3,1	3,8	3,5	4,0	—	4,0	4,07
$3,0 \cdot 10^{-3}$	53,2	23,1	5,0	6,0	—	6,0	—	6,0	6,13

Tabelle 5

Ba₃(FeCy₆)₂. Leitfähigkeit

κ	$m \cdot 10^3$	$\sqrt{m} \cdot 10^3$	$l = 10 \text{ m}$		$l = 20 \text{ m}$		$l = 40 \text{ m}$	
			beob. in %	ber. in %	beob. in %	ber. in %	beob. in %	ber. in %
$4,75 \cdot 10^{-5}$	0,32	1,8	1,8	2,6	1,4	1,5	1,0	1,2
$9,5 \cdot 10^{-5}$	0,73	2,7	1,6	3,2	—	1,6	—	1,0
$1,9 \cdot 10^{-4}$	1,60	4,0	2,8	3,3	1,2	1,4	0,6	0,7
$3,8 \cdot 10^{-4}$	3,48	5,9	2,7	2,6	—	1,0	0,4	0,3
$7,6 \cdot 10^{-4}$	6,72	8,2	1,6	1,5	0,7	0,4	0,2	0,1
$1,5 \cdot 10^{-3}$	19,0	13,8	1,4	0,6	0,35	0,1	—	0,04
$3,0 \cdot 10^{-3}$	42,8	20,7	1,1	0,2	—	—	—	0,00

Tabelle 6

Ba₃(FeCy₆)₂. Dielektrizitätskonstante

κ	$m \cdot 10^3$	$\sqrt{m} \cdot 10^3$	$l = 10 \text{ m}$		$l = 20 \text{ m}$		$l = 40 \text{ m}$		$l = \infty$
			beob. in %	ber. in %	beob. in %	ber. in %	beob. in %	ber. in %	ber. in %
$4,75 \cdot 10^{-5}$	0,32	1,8	0,0	0,0	0,11	0,08	0,0	0,2	0,8
$9,5 \cdot 10^{-5}$	0,73	2,7	0,15	0,13	—	0,27	—	0,5	1,2
$1,9 \cdot 10^{-4}$	1,60	4,0	0,5	0,45	0,45	0,77	1,0	1,3	1,8
$3,8 \cdot 10^{-4}$	3,48	5,9	1,1	1,3	—	1,9	1,5	2,2	2,5
$7,6 \cdot 10^{-4}$	6,72	8,2	2,3	2,9	2,9	3,4	2,8	3,6	3,7
$1,5 \cdot 10^{-3}$	19,0	13,8	4,6	5,9	5,1	6,1	—	6,2	6,2
$3,0 \cdot 10^{-3}$	42,8	20,7	8,4	9,2	7,6	9,3	—	9,3	9,3

Tabelle 7

 $\text{Ba}_2(\text{FeCy}_6)_2$. $l = 10 \text{ m}$

$\sqrt{m} \cdot 10^3$	$\omega \Theta$	Leitfähigkeit			Dielektrizitätskonstante		
		beob. in ‰	ber. (1) in ‰	ber. (2) in ‰	beob. in ‰	ber. (1) in ‰	ber. (2) in ‰
1,8	25	1,8	2,6	2,7	0,0	0,0	0,0
2,7	12,2	2,6	3,2	3,4	0,15	0,13	0,1
4,0	5,5	2,8	3,3	3,8	0,50	0,45	0,35
5,9	2,4	2,7	2,6	3,7	1,1	1,3	0,92
8,2	1,1	1,6	1,5	2,8	2,3	2,9	2,3
13,8	0,45	1,4	0,6	1,8	4,6	5,9	5,1
20,7	0,21	1,1	0,2	0,9	8,4	9,2	8,8

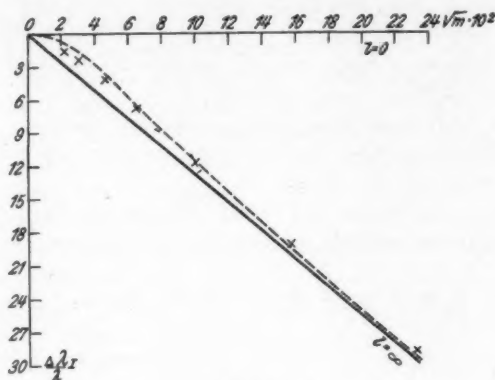
Tabelle 8

 Li_2SO_4 . $l = 20 \text{ m}$

x	Leitfähigkeit		Dielektrizitätskonstante	
	beob. in ‰	ber. in ‰	beob. in ‰	ber. in ‰
$1,9 \cdot 10^{-4}$	0,47	0,58	0,1	0,2
$7,6 \cdot 10^{-4}$	0,28	0,21	0,6	0,9

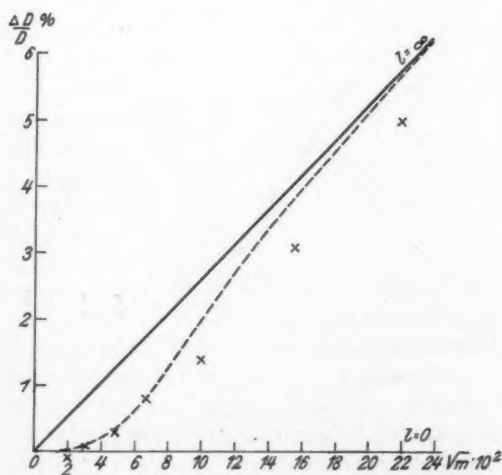
IV. Besprechung der Ergebnisse

Von den eben genannten Versuchsergebnissen sind für $l = 10$ Meter in Figg. 7 und 8 die Zahlen für Widerstandsänderung und Dielektrizitätskonstante bei Magnesiumsulfat, in Figg. 9 und 10 die entsprechenden Zahlen für Bariumferricyanid dargestellt. Die anderen Beobachtungen zeigen das gleiche, jedoch treten die Dinge nicht so klar hervor, wie bei den genannten Salzen mit Ionen hoher Wertigkeit und der kürzesten verwandten Wellenlänge von 10 m. Sowohl aus den Figuren für Magnesiumsulfat wie denen für Bariumferricyanid ergibt sich, daß die Widerstandsänderung im wesentlichen der theoretischen Kurve entspricht und der Zeiteffekt deutlich erkennbar ist. — Ebenso liegen bei der Dielektrizitätskonstante die beobachteten Werte in der Nähe der theoretisch berechneten Kurve, und auch bei der Dielektrizitätskonstante ist nicht nur der Wurzeffekt deutlich hervortretend, sondern auch der Zeiteffekt, da bei den niedrigen Konzentrationen die Punkte alle



MgSO_4
Leitfähigkeit

Fig. 7



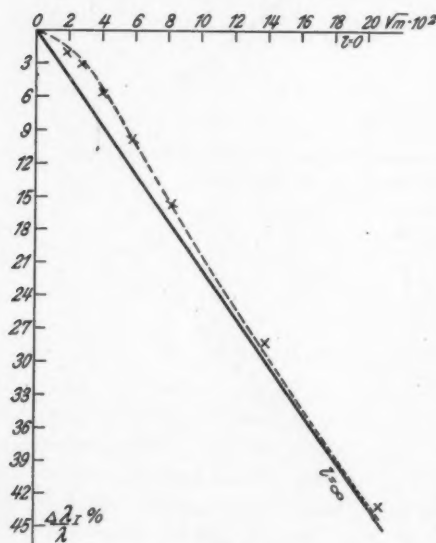
MgSO_4 , $l = 10 \text{ m}$
Dielektrizitätskonstante

Fig. 8

entsprechend dem Zeiteffekt wesentlich unter der Wurzelgeraden liegen und mit der theoretischen Kurve annähernd übereinstimmen, während sie bei den höheren Konzentrationen sich ihr allmählich wieder nähern.

Die Leitfähigkeitsänderung entspricht durchaus den in dem Leipziger Institut beobachteten Werten; wie wir sehen werden, sogar im einzelnen.

Von einem Sinken der Dielektrizitätskonstante unter den Wert des Lösungsmittels ist nirgends ein Anzeichen vorhanden.



$Ba_3[Fe(CN)_6]_3$
Leitfähigkeit $l = 10$ Meter

Fig. 9

nen Konzentrationen eintreten. Ich habe nichts Derartiges bei Vergleich der verschiedenen Lösungen in Wasser und

Da von mehreren Beobachtern, insbesondere von Fürth¹⁾ und seinen Schülern, ein Sinken der Dielektrizitätskonstante bis über 10 Proz. gerade in dem Bereich der Konzentration, in dem ich arbeitete, gefunden worden ist, habe ich diesen Punkt besonders sorgfältig geprüft. Bei einem Vergleich verschiedener Lösungen hätten sich erhebliche Unterschiede zeigen müssen, da die von Fürth beobachteten Differenzen verschieden groß sind und bei verschiede-

1) R. Fürth, Ztschr. f. Phys. 22. S. 98. 1924; 44. S. 256. 1927; R. Pechhold, Ann. d. Phys. 83. S. 427. 1927; O. Milicka u. A. Slama, Ann. d. Phys. [5] 8. S. 663. 1931.

ebensowenig in anderen Lösungsmitteln feststellen können. Auch habe ich absolute Messungen gemacht, um die Dielektrizitätskonstante der Lösung direkt mit dem reinen Lösungsmittel zu vergleichen, obgleich derartige absolute Messungen bei den hohen Frequenzen, wie oben gesagt, nicht so genau sind als der Vergleich zweier Lösungen. Immerhin hätte ich dabei eine Differenz gegen das Lösungsmittel von 1 Proz. sicher feststellen können, jedoch wurde keine Andeutung davon gefunden. Wenn nicht bei der Methode von Fürth noch besondere Fehlerquellen vorhanden sind, die das Sinken der

Dielektrizitätskonstante vortäuschen, so müßte man annehmen, daß der von ihm bei Niederfrequenz beobachtete Effekt bei Hochfrequenz verschwindet (vgl. hierüber Ortman, a. a. O.).

Nach den obigen Versuchsergebnissen ist kein Zweifel vorhanden, daß die Debye-Falkenhagensche Theorie auf richtiger Grundlage beruht, und daß sie recht genau auch zahlenmäßig durch die Versuche bestätigt wird,

und zwar sowohl bei der Leitfähigkeit wie auch bei der Dielektrizitätskonstante. Im einzelnen sind allerdings noch Abweichungen vorhanden, die sogleich näher besprochen werden sollen.

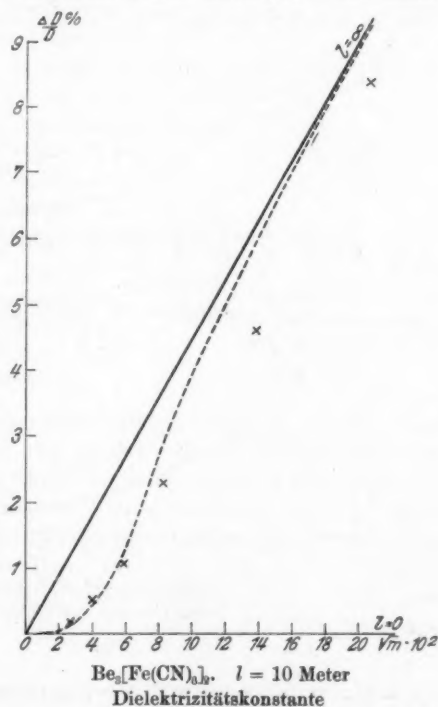


Fig. 10

Abweichungen

Um die Abweichungen bei dem Zeiteffekt der Leitfähigkeit besser hervortreten zu lassen, ist es praktisch, den Zeiteffekt selbst für sich allein aufzutragen, d. h. die Verminderung des Widerstandes gegenüber den Werten für sehr langsame Schwingungen, wie man sie mit der Kohlrauschbrücke mißt. Dies ist in den folgenden Figg. 11 und 12 für Bariumferricyanid

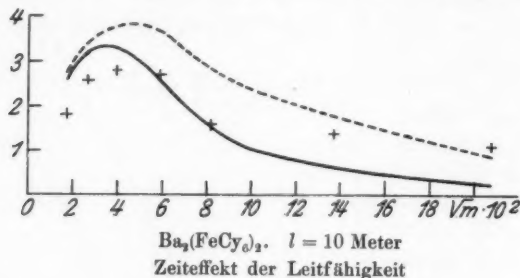


Fig. 11

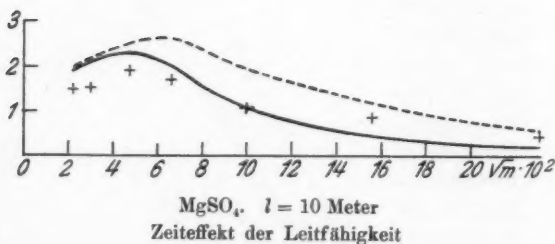


Fig. 12

und für Magnesiumsulfat bei $l = 10$ Meter geschehen. Die theoretische Kurve ist ausgezogen und die Beobachtungen sind als Kreuze eingezeichnet. Wenn auch hierbei im großen und ganzen die Beobachtung der Theorie entspricht, so sieht man doch deutlich, daß bei den kleineren Konzentrationen die Kreuze unter der theoretischen Kurve liegen, hingegen von einer gewissen Konzentration an die Kreuze höher liegen als die theoretische Kurve. Dasselbe ist auch, wenn auch nicht so deutlich, bei Magnesiumsulfat zu erkennen.

Herr Dr. Gärtner, der im Leipziger Physikalischen Institut die Leitfähigkeit nach der ganz von der hier verwandten veränderten Sackschen Methode gemessen hat, war so freundlich, mir die Ergebnisse für Calciumferrocyanid mitzuteilen, die in Fig. 13 wiedergegeben sind. Die Widerstandsänderungen sind wegen der höheren Wertigkeit — 2·4 gegen 2·3 — etwas höher als bei Bariumferricyanid. Der Verlauf der Beobachtungen, die als Kreuze eingezeichnet sind, ist genau der gleiche wie bei mir. Man sieht auch hier, daß die Beobachtungen bei größeren Verdünnungen unter der berechneten Kurve liegen und daß sie bei den stärkeren Konzentrationen eben über die theoretische Kurve hinauszugehen beginnen. Leider sind die Messungen nicht auf noch höhere Konzentrationen ausgedehnt.

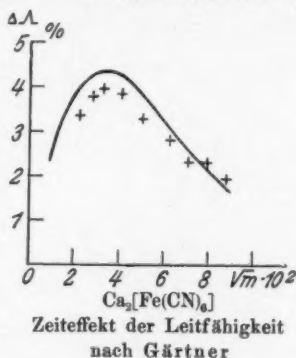


Fig. 13

Bei der Dielektrizitätskonstante sehen wir in den obigen Figg. 9 und 10, daß die Punkte bei den stärkeren Konzentrationen wesentlich unter der theoretischen Kurve liegen. Es scheint die Vermehrung des Widerstandseffektes mit der Verminderung des Dielektrizitätskonstanten-Effektes bei höheren Konzentrationen Hand in Hand zu gehen. Das gleiche Verhalten bei Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante zeigen auch andere Lösungen, z.B. die in der Tab. 8 angeführten Messungen von Li_2SO_4 .

Die Abweichungen von der Theorie kann man auf verschiedene Weise zu deuten suchen. Einmal damit, daß die Theorie nur für ganz verdünnte Lösungen gilt, so daß an sich Abweichungen bei stärkeren Konzentrationen nicht weiter verwunderlich sind. Dann ist auch eine nicht völlige Dissoziation bei den stärkeren, insbesondere den hochwertigen Elektrolyten möglich, die insbesondere die Abweichungen bei der Dielektrizitätskonstante erklären würde. Weiter könnte auch an ein Hervortreten des Debye-Sackschen

Sättigungseffektes¹⁾ gedacht werden. Schließlich kann auch folgende Erwägung mitsprechen: Wie oben erwähnt, kann man die Relaxationszeit, von der der Zeiteffekt beherrscht wird, in der Form darstellen:

$$\Theta = 8,85 \cdot 10^{-14} \frac{D}{\kappa_{\infty}}.$$

Diese „Anfangsrelaxationszeit“ ist sicher bei dem Beginn der Bildung der Ionenwolken die maßgebende. Wenn jedoch die Ionenwolken sich im wesentlichen schon gebildet haben, wie es bei den verwandten Schwingungszahlen bei größeren Konzentrationen der Fall ist, so kommt für die Relaxation eine Zeit in Betracht, die nicht wie die Anfangsrelaxationszeit durch die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und die Leitfähigkeit für Ionen ohne Wolken gilt, sondern die entsprechenden Größen für langsame Schwingungen sind schon in Wirksamkeit, also die wahre Dielektrizitätskonstante der Lösung D_i und die wahre Leitfähigkeit κ

$$\Theta = 8,85 \cdot 10^{-14} \frac{D_i}{\kappa}.$$

Dadurch wird der Zeiteffekt wesentlich beeinflusst. In der Fig. 11 für $\text{Ba}_3(\text{FeCy}_6)_2$ und in Fig. 12 für MgSO_4 sind punktiert die theoretischen Kurven eingezeichnet, wie sie sich unter Einführung dieser „Endrelaxationszeit“ ergeben. In der Tab. 7 sind für $\text{Ba}_3(\text{FeCy}_6)_2$ unter „ber. (2)“, die mit der „Endrelaxationszeit“ berechneten Werte der Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante angegeben, während „ber. (1)“ die entsprechenden Werte auf Grund der „Anfangsrelaxationszeit“ berechnet enthält. Es würde also im Anfang bei verdünnten Lösungen die Anfangsrelaxationszeit wirksam sein, später etwa von $\omega \Theta = 1$, $\sqrt{m} = 0,1$ ab die Endrelaxationszeit allmählich eintreten. Dementsprechend sieht man in den Figuren die beobachteten Werte allmählich von der ausgezogenen Kurve zu der punktierten Kurve hinübergehen.

Ob auf einen dieser Gründe, oder vielleicht auf mehrere gleichzeitig, die Abweichungen von der Theorie zurückzuführen sind, kann nur durch weitere Versuche geklärt werden.

1) P. Debye, Polare Molekeln. S. 128. Leipzig, S. Hirzel, 1929.

Zusammenfassung

Die Bedeutung der gleichzeitigen Messung von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante wird an Hand der Debye-Onsager-Falkenhagenschen Theorie der Elektrolyte dargestellt. Mittels der Barettermethode werden bei Wellenlängen von 10, 20 und 40 m die Leitfähigkeit und die Dielektrizitätskonstante verschiedener Lösungen, insbesondere von MgSO_4 und $\text{Ba}_3(\text{FeCy}_6)_2$ bis zu Äquivalentkonzentrationen von $5 \cdot 10^{-2}$ gemessen. Es ergibt sich grundsätzlich eine gute Übereinstimmung mit der Debye-Falkenhagenschen Theorie. Die Abweichungen werden besprochen.

Jena, Physikalisches Institut der Universität. 14. Juli 1931.

(Eingegangen 15. Juli 1931)

Über den atomaren Photoeffekt in der K-Schale nach der relativistischen Wellenmechanik Diracs

Von Fritz Sauter

Eine Theorie des Photoeffektes hat über folgende drei Fragen Aufschluß zu geben:

1. Intensitätsverteilung der Photoelektronen;
2. Gesamtausbeute an Photoelektronen und lichtelektrischer Absorptionskoeffizient;
3. Polarisation der Photoelektronen.

Die ersten zwei Fragen sind durch die Arbeiten von Wentzel¹⁾, Beck²⁾, Nishina und Rabi³⁾, Sommerfeld und Schur⁴⁾, Schur⁵⁾, Stobbe⁶⁾, Fischer⁷⁾, Sauter⁸⁾ in dem Falle behandelt und weitgehend geklärt worden, daß die Geschwindigkeit der austretenden Photoelektronen klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist, so daß das Problem im Anschluß an die nichtrelativistische Schrödingergleichung durchgerechnet werden kann. Eine einigermaßen erschöpfende Behandlung dieser beiden Fragen für das Gebiet harter Röntgen- und γ -Strahlen, also auf Grund der Diracschen Theorie steht bisher noch aus⁹⁾¹⁰⁾. Die vom Verfasser in I gegebenen

1) G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. **40**. S. 574. 1926; **41**. S. 828. 1927.

2) G. Beck, Ztschr. f. Phys. **41**. S. 443. 1927.

3) Y. Nishina u. I. Rabi, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **9**. H. 1. S. 8. 1928.

4) A. Sommerfeld u. G. Schur, Ann. d. Phys. [5] **4**. S. 409. 1930.

5) G. Schur, Ann. d. Phys. [5] **4**. S. 433. 1930.

6) M. Stobbe, Ann. d. Phys. [5] **7**. S. 661. 1930.

7) J. Fischer, Ann. d. Phys. [5] **8**. S. 821. 1931.

8) F. Sauter, Ann. d. Phys. [5] **9**. S. 217. 1931; im folgenden mit I zitiert.

9) Eine diesbezügliche Arbeit von S. E. Szczeniowski (Phys. Rev. **35**. S. 347. 1930) unterliegt, wie in I gezeigt wurde, einer Reihe von schweren Einwänden und führt zu einem wesentlich falschen Resultat.

10) Von L. C. Roess (Phys. Rev. **37**. S. 532. 1931) wurde der Absorptionskoeffizient in der K-Schale nach der Diracschen Theorie be-

Rechnungen nach dieser Theorie wurden nur so weit geführt, als es in geschlossener Form streng möglich ist.

In der vorliegenden Arbeit sollen diese Rechnungen näherungsweise weitergeführt werden (Kap. 2 und 3), so daß man Formeln für die Intensitätsverteilung der Photoelektronen und für den Absorptionskoeffizienten erhält, die auch bei harter einfallender Strahlung angenähert gültig sind (Kap. 4).

Eine Durchrechnung des Photoeffektes nach der Diracschen Theorie besitzt weiter den Vorteil, daß sie auch Aussagen über die Polarisationsverhältnisse der austretenden Photoelektronen zu machen erlaubt. Diese Frage ist bisher nur in den Untersuchungen von Fues und Hellmann¹⁾ über die Erzeugung polarisierter Elektronenwellen berührt worden. Diese Frage eingehender zu untersuchen, ist das Ziel des 5. Kapitels.

1. Wiederholung der allgemeinen Ansätze

Es dürfte angezeigt sein, vor Beginn der Rechnungen dieser Arbeit kurz die Methode und die Voraussetzungen anzugeben, nach denen die Ausdrücke I (36) und (37) für die Wellenfunktionen des auslaufenden Photoelektrons abgeleitet wurden, an welche die vorliegenden Rechnungen anknüpfen sollen.

Behandelt wird die Störung eines in einem Atom gebundenen Elektrons durch eine polarisierte Lichtwelle, gegeben durch das Vektorpotential

$$(1) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_y = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{z}{\lambda} \right).$$

Gerechnet wird unter Verwendung der Wasserstoffeigenfunktionen mit der Kernladungszahl Z ; es wird also die Wechselwirkung der Atomelektronen und damit die abschirmende Wirkung der Elektronenhülle vernachlässigt. Diese Vernachlässigung kann dadurch gerechtfertigt werden, daß der Photoeffekt seinen Ursprung im wesentlichen innerhalb der ersten Bohrschen Bahn, zum Teil sogar in unmittelbarer Nähe des Kernes hat (s. u.), wo

rechnet. Da in seinen Rechnungen der Retardierungsfaktor vernachlässigt wurde, gelten seine Resultate nur für die unmittelbare Umgebung der Absorptionskante.

1) E. Fues u. H. Hellmann, Phys. Ztschr. **31**. S. 465. 1930.

die Kraftwirkung des Kernes die der umgebenden Elektronenschalen weitgehend überwiegt. Ist das Photoelektron einmal aus seiner Bahn losgelöst, so kann es zwar beim Durchtritt durch die äußeren Schalen in seiner Bahn mehr oder weniger abgelenkt werden, je nachdem seine kinetische Energie klein oder groß ist gegenüber der dort wirkenden potentiellen Energie; auf die Größe der Gesamtemission und damit auf die des Absorptionskoeffizienten bleibt diese ablenkende Wirkung offenbar ohne Einfluß; ein solcher Einfluß wird nur auf die Intensitätsverteilung der Photoelektronen bestehen, doch wird er in dem uns hier hauptsächlich interessierenden Fall der Emission durch harte Strahlung wegen der Größe der kinetischen Energie des Photoelektrons relativ gering sein. Ferner wird der Kern als unendlich schwer angenommen.

Die Rechnungen werden für den Fall der Störung eines Elektrons in einer $1-s$ -Bahn durchgeführt. Entsprechend den beiden möglichen Spinorientierungen gibt es zwei linear unabhängige Wellenfunktionen für das Ausgangsniveau; als solche verwenden wir die durch I (32) gegebenen Funktionen ψ_1 und ψ_2 , die einem magnetischen Moment in der positiven bzw. negativen z -Richtung entsprechen.¹⁾

Die Durchführung der Störungsrechnung nach den üblichen Methoden ergibt zwei Resonanznenner an den beiden Stellen

$$E = E_1 + h\nu \quad \text{und} \quad E = E_1 - h\nu,$$

wobei E_1 die Energie des Grundniveaus und ν die Frequenz der einfallenden Lichtwelle bedeuten. Während für den hier ausschließlich behandelten Fall

$$h\nu > E_0 - E_1$$

(E_0 = Ruheenergie) die erste Resonanzstelle in das Gebiet des positiv kontinuierlichen Energiespektrums fällt und den für den Photoeffekt maßgebenden Beitrag zur gestörten Funktion liefert, entspricht der zweiten Resonanzstelle entweder überhaupt kein reeller Energiewert oder, für den Fall

$$h\nu > E_0 + E_1$$

1) Nach (1) fällt die Strahlrichtung mit der z -Richtung zusammen, der elektrische Vektor schwingt parallel zur y -Achse.

ein solcher des negativ kontinuierlichen Energiespektrums. Diese zweite mögliche Resonanzstelle führt zu physikalisch absurden Resultaten und soll daher unberücksichtigt bleiben.

Für die Durchrechnung wählen wir die stationäre Behandlungsweise (Abspaltung der Zeitabhängigkeit und Operieren mit den zeitunabhängigen Eigenfunktionen). Wir interessieren uns nur für die Wellenfunktion des auslaufenden Elektrons in großer Entfernung vom gestörtem Atom und brauchen daher nur ihren asymptotischen Wert zu berechnen. Dabei kann man sich, wie Sommerfeld und Schur¹⁾ gezeigt haben, auf die einer auslaufenden Welle entsprechenden Teilfunktion beschränken, indem man durch einen Kunstgriff den physikalisch sinnlosen Beitrag der einlaufenden Welle zum Verschwinden bringen kann. Diese Methode führt, wie Bethe²⁾ gezeigt hat, zum gleichen Resultat wie die nichtstationäre Behandlung des Problems, bei der der Betrag der einlaufenden Welle automatisch verschwindet.³⁾

Wie in I gezeigt wurde, führt die Durchrechnung des Problems nach diesen Richtlinien zu folgenden Ausdrücken für die Wellenfunktionen des Photoelektrons (in Operatorenschreibweise):

$$(2) \begin{cases} \psi_1 = [-(F_1 + G_1 e^{2i\varphi}) - \gamma_1 \gamma_3 (F_2 e^{-i\varphi} + G_2 e^{i\varphi}) - \gamma_3 (F_3 + G_3 e^{2i\varphi}) \\ \quad + \gamma_1 (F_4 e^{-i\varphi} + G_1 e^{i\varphi})] \cdot [1 + i\gamma_1 \gamma_2] [1 + \gamma_4]; \\ \psi_2 = [(F_2 e^{i\varphi} + G_2 e^{-i\varphi}) - \gamma_1 \gamma_3 (F_1 + G_1 e^{-2i\varphi}) \\ \quad + \gamma_3 (F_4 e^{i\varphi} + G_4 e^{-i\varphi}) + \gamma_1 (F_3 + G_3 e^{-2i\varphi})] \\ \quad \cdot [1 + i\gamma_1 \gamma_2] [1 + \gamma_4]. \end{cases}$$

Die F_v und G_v sind durch I (35) gegeben und zwar lauten sie:

1) Sommerfeld u. Schur, a. a. O.

2) H. Bethe, Ann. d. Phys. [5] 4. S. 443. 1930.

3) Vgl. auch T. Muto (Scient. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo 15. S. 111. 1931), der die Behandlungsweise von Bethe auf die Dirac'sche Theorie des Photoeffektes überträgt.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \left\{ \begin{aligned}
 F_1 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l U_{\text{as.}} \{A_1 P_l \cdot l + A_2 P_{l-1} \cdot l\}, \\
 F_2 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l U_{\text{as.}} \{A_1 P_l^1 - A_2 P_{l-1}^1\}, \\
 F_3 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l V_{\text{as.}} \{A_1 P_{l-1} \cdot l + A_2 P_l \cdot l\}, \\
 F_4 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l V_{\text{as.}} \{A_1 P_{l-1}^1 - A_2 P_l^1\}, \\
 G_1 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l U_{\text{as.}} \left\{ -A_3 P_l^2 \cdot \frac{1}{l(l+1)} + A_4 P_{l-1}^2 \cdot \frac{1}{l(l-1)} \right\}, \\
 G_2 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l U_{\text{as.}} \left\{ A_3 P_l^1 \cdot \frac{l-1}{l(l+1)} + A_4 P_{l-1}^1 \cdot \frac{l+1}{l(l-1)} \right\}, \\
 G_3 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l V_{\text{as.}} \left\{ -A_3 P_{l-1}^2 \cdot \frac{1}{l(l+1)} + A_4 P_l^2 \cdot \frac{1}{l(l-1)} \right\}, \\
 G_4 &= \frac{\pi e A}{2 \hbar v} \cdot \sum_l V_{\text{as.}} \left\{ A_3 P_{l-1}^1 \cdot \frac{1}{l} + A_4 P_l^1 \cdot \frac{1}{l} \right\},
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

wobei die A , [vgl. I (34)] als Abkürzung für die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \left\{ \begin{aligned}
 A_1 &= 2 \pi i \int (V_1^* U_0 P_{l-1} + U_1^* V_0 P_l \cos \vartheta) \\
 &\quad \cdot e^{i q r \cos \vartheta} \cdot r^2 dr \sin \vartheta d \vartheta, \\
 A_2 &= 2 \pi i \int (V_{11}^* U_0 P_l + U_{11}^* V_0 P_{l-1} \cos \vartheta) \\
 &\quad \cdot e^{i q r \cos \vartheta} \cdot r^2 dr \sin \vartheta d \vartheta, \\
 A_3 &= 2 \pi i \int U_1^* V_0 P_l^1 \sin \vartheta \cdot e^{i q r \cos \vartheta} \cdot r^2 dr \sin \vartheta d \vartheta, \\
 A_4 &= 2 \pi i \int U_{11}^* V_0 P_{l-1}^1 \sin \vartheta \cdot e^{i q r \cos \vartheta} \cdot r^2 dr \sin \vartheta d \vartheta
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

dienen. Das A in den Formeln (3) ist identisch mit der Amplitude der Störungsfunktion (1), v ist die Geschwindigkeit des Photoelektrons, $q = \frac{2\pi}{\lambda}$. U_0 und V_0 stellen die durch I (32b) gegebenen Radialteile der Wellenfunktionen des Grundzustandes dar¹⁾; wir schreiben die Formeln etwas anders hin:

1) In den Formeln I (32b) sind leider einige Druckfehler unterlaufen: U_0 ist die „große“, V_0 die „kleine“ Funktion, entsprechend steht, wie auch aus I (30a) unmittelbar folgt, bei U_0 der Ausdruck $\sqrt{E_0(1+j_0)}$, während bei V_0 das Minuszeichen auftritt; die Gammafunktion im Nenner des Normierungsfaktors lautet $\Gamma(2j_0 + 1)$.

$$(5) \left\{ \begin{aligned} U_0 &= \frac{N_0}{2} \sqrt{\frac{1+j_0}{2\pi}} \cdot e^{-k_0 r} r^{j_0-1}, \\ V_0 &= \frac{N_0}{2} \sqrt{\frac{1-j_0}{2\pi}} \cdot e^{-k_0 r} r^{j_0-1}, \end{aligned} \right.$$

mit

$$(5a) \left\{ \begin{aligned} N_0^2 &= \frac{(2k_0)^{2j_0+1}}{\Gamma(2j_0+1)}, \quad j_0 = \sqrt{1-\alpha^2 Z^2}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\hbar c} E_0 \alpha Z. \end{aligned} \right.$$

Auch die Funktionen U und V für das kontinuierliche Spektrum schreiben wir etwas einfacher hin, indem wir sie gleichzeitig normieren:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{|\Gamma(n+j)|}{\Gamma(2j+1)} e^{\frac{i\pi n}{2}} \\ &\quad \cdot e^{-i\pi r} (2\pi r)^{j-1} (X+Y), \\ V &= \frac{i x}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{|\Gamma(n+j)|}{\Gamma(2j+1)} e^{\frac{i\pi n}{2}} \\ &\quad \cdot e^{-i\pi r} (2\pi r)^{j-1} (X-Y), \end{aligned} \right.$$

mit

$$(6a) \left\{ \begin{aligned} X &= (\mp l + n \sqrt{1-\beta^2}) F(-n+j, 2j+1, 2i\pi r), \\ Y &= (j-n) F(-n+j+1, 2j+1, 2i\pi r), \end{aligned} \right.$$

wobei sich das obere Vorzeichen in X auf das erste, das untere auf das zweite Lösungssystem der Diracgleichung des Keplerproblems bezieht. Es gilt

$$(7) \quad x = \frac{2\pi}{\hbar c} \cdot \frac{\mu v c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad n = \frac{\alpha Z}{i\beta}, \quad j = \sqrt{l^2 - \alpha^2 Z^2},$$

wobei $\beta = \frac{v}{c}$ durch die photoelektrische Gleichung (Emission aus dem Grundniveau)

$$(8) \quad \hbar \nu = m c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\alpha^2 Z^2} \right)$$

mit der Frequenz des einfallenden Lichtes verknüpft ist. Die asymptotischen Teilwerte von (6) mit dem Exponentialfaktor $e^{i\pi r}$ (auslaufende Wellen) lauten

$$(9) \quad \begin{cases} U_{as} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{|T(n+j)|}{T(-n+j)} \cdot \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}j}}{(2\kappa)^n} \cdot \frac{e^{i\kappa r}}{r^{1+n}}, \\ V_{as} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{|T(n+j)|}{T(-n+j)} \cdot \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}(j+1)}}{(2\kappa)^n} \cdot \frac{e^{i\kappa r}}{r^{1+n}}. \end{cases}$$

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit besteht darin, unter Verwendung der Formeln (3) bis (9) die Wellenfunktionen (2) des auslaufenden Elektrons wirklich zu berechnen, was, wie bereits in I angegeben wurde, nur näherungsweise durchführbar ist.

Aus den Wellenfunktionen (2) erhält man die Intensitätsverteilung der Photoelektronen durch Berechnung des wellenmechanischen Stromes. Dieser ist natürlich radial gerichtet und bestimmt sich, wie in I gezeigt wurde, in der Form

$$(10) \quad S_r = \frac{ev}{r^4 \sqrt{1 - \beta^2}} (H + K \cos 2\varphi \pm M \sin 2\varphi),$$

wobei sich das obere Vorzeichen bei M bei Berechnung des Stromes aus Ψ_1 , das untere bei der aus Ψ_2 ergibt. H , K und M sind reelle Funktionen von ϑ allein und werden definiert durch die Ausdrücke

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{1}{r^2} H = F_1 F_1^* + F_2 F_2^* - F_3 F_3^* - F_4 F_4^* \\ \quad \quad \quad + G_1 G_1^* + G_2 G_2^* - G_3 G_3^* - G_4 G_4^*, \\ \frac{1}{2r^2} K = R(F_1 G_1^* + F_2 G_2^* - F_3 G_3^* - F_4 G_4^*), \\ \frac{1}{2r^2} M = J(F_1 G_1^* + F_2 G_2^* - F_3 G_3^* - F_4 G_4^*). \end{cases}$$

(R und J bedeuten Real- und Imaginärteil).¹⁾

Was die Polarisationsverhältnisse betrifft, so entspricht bekanntlich dem magnetischen Moment des Elektrons in der

1) Bei freien Elektronen und damit auch bei Photoelektronen in großer Entfernung vom Kern kann man den Strom, wie sich auf Grund der Diracgleichung leicht verifizieren läßt, auch aus der Dichteverteilung berechnen: $S_r = ev \Psi \gamma_4 \Psi$. In dieser Hinsicht ist die Methode von Szczeniowski (a. a. O.) zur Berechnung der Intensitätsverteilung der Photoelektronen, im Gegensatz zu meiner Behauptung in I, zulässig. (Diese Feststellung verdanke ich einer freundlichen Zuschrift Hrn. Szczeniowski).

Diracschen Theorie der Operator $\frac{e}{m} \cdot \frac{\hbar}{4\pi c} \sigma$, wobei der Spinoperator σ durch seine Komponenten

$$(12) \quad \sigma_x = \frac{1}{i} \gamma_2 \gamma_3, \quad \sigma_y = \frac{1}{i} \gamma_3 \gamma_1, \quad \sigma_z = \frac{1}{i} \gamma_1 \gamma_2$$

bestimmt ist. Man würde den Erwartungswert des magnetischen Momentes an irgendeiner Stelle des Raumes durch Bildung des Matricelementes $\frac{e}{m} \frac{\hbar}{4\pi c} \bar{\Psi} \sigma \Psi$ erhalten, wenn Ψ normiert wäre. Da jedoch die Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 des auslaufenden Elektrons nicht normiert sind, so gibt dieses Matricelement lediglich Aufschlüsse über die Orientierung des magnetischen Momentes.

Setzt man die Wellenfunktion des Grundzustandes allgemein in der Form $\psi = a \psi_1 + b \psi_2$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ an, so ergibt die Integration dieser Matricelemente über den ganzen Raum das durch ein Elektron der K-Schale bedingte magnetische Moment des Atoms mit den Komponenten

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x^0 = -(a b^* + b a^*) \cdot M^0 \\ M_y^0 = -i(a b^* - b a^*) \cdot M^0 \\ M_z^0 = (a a^* - b b^*) \cdot M^0 \end{array} \right\} \quad M^0 = \frac{2 + j_0}{3} \cdot \frac{e}{m} \frac{\hbar}{4\pi c}.$$

Unseren Ausgangsfunktionen ψ_1 und ψ_2 entsprechen demnach magnetische Momente in der positiven bzw. negativen z -Richtung, wie oben angeführt wurde.¹⁾

2. Berechnung der Störungsintegrale

Um überhaupt eine weitere Durchrechnung des Problems zu ermöglichen, müssen wir die in den radialen Funktionen auftretenden Größen $j = \sqrt{l^2 - \alpha^2 Z^2}$ durch die ganze Zahl l ersetzen. Dies bedeutet eine Vernachlässigung von Größen der Ordnung $\alpha^2 Z^2$; wenn auch diese Vernachlässigung nur im Falle von Photoeffekt an leichten Atomen zulässig zu sein scheint, so werden wir doch die so erhaltenen Schlußformeln auf die Fälle von schwereren Elementen anwenden, um auch hier wenigstens qualitativ einen Überblick über den

1) Es dürfte nicht unangebracht sein, darauf hinzuweisen, daß ein 1- π -Elektron nach der Diracschen Theorie als magnetisches Moment nicht den Betrag eines vollen Bohrschen Magnetons besitzt, sondern einen um den Faktor $\frac{2 + j_0}{3}$ kleineren Wert.

Verlauf der Intensitätsverteilung und des Absorptionskoeffizienten zu erhalten. Es sei hier auf die Arbeit von Roess¹⁾ hingewiesen, der — allerdings, wie bereits bemerkt, unter Vernachlässigung der Retardierung — den Absorptionskoeffizienten ohne die obige Vernachlässigung numerisch berechnet hat; er fand eine Abnahme des Koeffizienten gegenüber dem Wert der Schrödingerschen Theorie bei zunehmender Kernladungszahl. Als maximale Abweichung an der Absorptionskante findet er den Wert 14,6 Proz. bei Blei. Der durch die obige Vereinfachung bedingte Fehler wird, wohl auch bei höheren Geschwindigkeiten, von gleicher Größenordnung sein, insbesondere bei leichten Elementen.

Die Einführung der oben angegebenen Vernachlässigung ermöglicht, wie im vorliegenden Abschnitt gezeigt werden soll, die Aufsummierung der Reihen (3) für die F_z und G_z und zwar nach einer Methode, die mir bei der Abfassung von I leider entgangen ist. Man erhält auf diese Weise geschlossene Ausdrücke für diese Größen, in denen allerdings noch eine Hilfsintegration nach k_0 auftritt, die sich nicht streng ausführen läßt. Man kann sich jedoch, wenigstens für große Geschwindigkeiten ($v \sim c$) mit einer Entwicklung der Integrale nach Potenzen von $|n| = \frac{\alpha Z}{\beta}$ behelfen und so brauchbare Formeln für sehr harte Strahlung erhalten. Für kleine Geschwindigkeiten ($v^2 \ll c^2$) kann die Rechnung nichtrelativistisch, also durch Entwicklung des Retardierungsfaktors $e^{iqr \cos \theta}$ und Weglassen der Glieder von der Ordnung β^2 durchgeführt werden; der Fortschritt dieser Rechnungen gegenüber denen von Sommerfeld und Schur²⁾ liegt in der Möglichkeit der Untersuchung der Polarisationsverhältnisse.

Bevor an die Weiterrechnung gegangen werden soll, möge hier noch ein Punkt berührt werden, der eventuell zu Mißverständnissen Anlaß geben könnte. Die Vermutung liegt nahe, daß die wichtigsten Beiträge in den Störungsintegralen aus den Gebieten stammen, in denen die Wellenfunktion des Grundzustandes, multipliziert wegen $d\tau$ mit r^2 , wesentlich von Null verschieden ist, also in der Nähe der ersten Bohrschen

1) L. C. Roess, a. a. O.

2) A. Sommerfeld und G. Schur, a. a. O.

Bahn. In diesem Gebiet ist im Falle $v \sim c$ das Argument πr der Wellenfunktion (6) bereits sehr groß gegen 1, so daß man an Stelle der vollständigen Wellenfunktionen ihre asymptotischen Entwicklungen, bzw. andere Funktionen mit dem gleichen asymptotischen Verhalten in die Störungsintegrale einführen und dadurch die Rechnung wesentlich vereinfachen könnte¹⁾; als solche gleichwertige Funktionen könnte man z. B. diejenigen wählen, die man aus (6) durch Nullsetzen von n , also durch Vernachlässigung der Wirkung des Kernfeldes auf das auslaufende Elektron erhält.²⁾

Diese Schlußweise ist jedoch, wie die genaue Durchrechnung des Problems zeigt, falsch. Es stellt sich nämlich heraus, daß der Photoeffekt, mathematisch gesprochen, durch zwei Glieder bedingt wird, von denen das eine im wesentlichen aus dem Gebiet der ersten Bohrschen Bahn stammt, während das zweite von den Abweichungen der Wellenfunktion des kontinuierlichen Spektrums von denen einer freien Kugelwelle herrührt, also hauptsächlich durch die unmittelbare Umgebung des Kerns bedingt ist. Beide Glieder sind von gleicher Größenordnung, so daß die oben angeführte Möglichkeit einer Vereinfachung der Rechnung falsch ist, da nach ihr die Wellenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums gerade in Kernnähe wesentlich abgeändert werden. Physikalisch kann man diesen Sachverhalt dadurch einigermaßen verständlich machen, daß man an die Unmöglichkeit eines Photoeffektes an freien Elektronen (wegen des Energie-Impulssatzes) erinnert. Je fester die Bindung zwischen Kern und Elektronen ist, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit eines Photoeffektes sein. Je härter andererseits die einfallende Strahlung ist, desto mehr wird man die Atomelektronen als frei ansehen können und auf einen desto kleineren Bereich um den Kern wird sich das

1) Diese Rechenweise findet sich außer in der zitierten Arbeit von S. E. Szczeniowski auch noch in einer nach Abschluß der vorliegenden Untersuchungen erschienenen Arbeit von H. Hall u. J. R. Oppenheimer (Phys. Rev. 38. S. 57. 1931).

2) Es sind dies im wesentlichen Besselfunktionen von halbzahliger Ordnung auf Grund der Beziehung

$$e^{-x} (2x)^l F(l+1, 2l+2, 2x) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{(2l+1)!}{l!} \frac{e^{\frac{i\pi l}{2}}}{\sqrt{-2ix}} J_{l+\frac{1}{2}}(-ix).$$

hauptsächlichste Entstehungsgebiet der Photoelektronen zusammenziehen. Außerhalb dieses Bereiches werden sich die Beiträge zum Photoeffekt zum größten Teil durch Interferenz vernichten, so daß der ganze übrige Bereich des Atoms nur einen Beitrag liefert, der, wie die Rechnung zeigt, gerade von gleicher Größenordnung ist, wie der Beitrag des kleinen Gebietes um den Kern.

Zur Berechnung der Störungsintegrale erweist es sich als zweckmäßig, U und V nach dem Schema

$$(14) \quad \begin{cases} U = U^{(1)} + U^{(2)}, \\ V = V^{(1)} + V^{(2)} \end{cases}$$

in zwei Summanden zu zerlegen, wobei die $U^{(v)}$ und $V^{(v)}$ gegeben sind durch die Ausdrücke

$$(14a) \quad \begin{cases} U_I^{(1)} = \frac{i\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{|I(n+l)|}{(2l+1)!} e^{-i\pi r + \frac{i\pi n}{2}} \\ \quad \cdot (2\pi r)^l (l-n) F(-n+l+1, 2l+2, 2i\pi r), \\ V_I^{(1)} = -\frac{i\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{|I(n+l)|}{(2l-1)!} e^{-i\pi r + \frac{i\pi n}{2}} \\ \quad \cdot (2\pi r)^{l-1} F(-n+l, 2l, 2i\pi r); \end{cases}$$

$$(14b) \quad \begin{cases} U_{II}^{(1)} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{|I(n+l)|}{(2l-1)!} e^{-i\pi r + \frac{i\pi n}{2}} \\ \quad \cdot (2\pi r)^{l-1} F(-n+l, 2l, 2i\pi r), \\ V_{II}^{(1)} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{|I(n+l)|}{(2l+1)!} e^{-i\pi r + \frac{i\pi n}{2}} \\ \quad \cdot (2\pi r)^l (l-n) F(-n+l+1, 2l+2, 2i\pi r); \end{cases}$$

sowie

$$(14c) \quad \begin{cases} U_{I, II}^{(2)} = -\frac{\pi\beta n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{|I(n+l)|}{(2l)!} e^{-i\pi r + \frac{i\pi n}{2}} \\ \quad \cdot (2\pi r)^{l-1} F(-n+l, 2l+1, 2i\pi r), \\ V_{I, II}^{(2)} = \frac{i\pi\beta n}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{|I(n+l)|}{(2l)!} e^{-i\pi r + \frac{i\pi n}{2}} \\ \quad \cdot (2\pi r)^{l-1} F(-n+l, 2l+1, 2i\pi r). \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Aufspaltung, wenn man die Beziehungen

$$(15) \left\{ \begin{aligned} F(\alpha+1, \gamma, x) - F(\alpha, \gamma, x) &= \frac{x}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, x), \\ (\gamma-\alpha)F(\alpha, \gamma+1, x) + \alpha F(\alpha+1, \gamma+1, x) &= \gamma F(\alpha, \gamma, x) \end{aligned} \right.$$

berücksichtigt. Außerdem wurde (vgl. oben) j durch l ersetzt und es gilt $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Diese Aufspaltung von U und V soll nur in den Störungsintegralen vorgenommen werden, während für U_{as} und V_{as} in (3) die ganzen durch (9) gegebenen Werte eingesetzt werden sollen. Man erhält so eine entsprechende Aufspaltung der F_γ und G_γ in zwei Summanden, und zwar so, daß sich $F_\gamma^{(1)}$ und $G_\gamma^{(1)}$ streng bis zum Schluß durchrechnen lassen, während bei $F_\gamma^{(2)}$ und $G_\gamma^{(2)}$ eine Integration nach der Konstanten k_0 am Ende der Rechnung nicht mehr streng durchführbar ist.

Um zuerst $F_\gamma^{(1)}$ und $G_\gamma^{(1)}$ zu berechnen, führen wir in (4) neben (14a) und (14b) die durch (5) gegebenen Funktionen des Grundzustandes ein. Wir wenden nun den gleichen Kunstgriff an wie im ersten Teil von I, indem wir in den $A_\gamma^{(1)}$ zuerst die Integration nach r ausführen, um dann die Summierung über l nach dem Fouriertheorem für Kugelfunktionen ausführen zu können, wodurch die Ausführung der ϑ -Integration überflüssig gemacht wird.

Durch Verwendung einer geeigneten Integraldarstellung für $F(\alpha, \gamma, x)$ und zwar

$$(16) F(\alpha, \gamma, x) = \Gamma(\gamma) x^{1-\gamma} e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int e^{\pi \xi} \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-\gamma} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{-\alpha} d\xi,$$

wobei der Integrationsweg im positiven Sinn um die beiden Verzweigungspunkte $\xi = \pm \frac{1}{2}$ herumführt, erhält man als direkte Übertragung der Gln. I (13) bis (15) die Beziehung

$$(17) \left\{ \begin{aligned} &\iint P_l r^{l+1} F(n+l+1, 2l+2, -2i\pi r) \\ &\quad \cdot e^{-k_0 r + i n r + i q r \cos \vartheta} dr \sin \vartheta d\vartheta = \\ &\frac{(2l+1)!}{(-2i\pi)^{l+1}} \cdot \frac{2i}{q} \cdot (\sigma^2 - 1)^n \left(\frac{q}{\pi}\right)^n \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+l+1)} \\ &\quad \cdot \int \frac{P_l \sin \vartheta d\vartheta}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{x}{q} - \frac{q}{x} - \frac{k_0^2}{\pi q}\right)^{n+1}}, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$(18) \quad \sigma = -\frac{\pi}{q} + \frac{k_0}{i q} {}^1);$$

mit der Abkürzung

$$(19) \quad R = (\sigma^2 - 1)^n \left(\frac{q}{\pi} \right)^n \cdot \frac{1}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{\pi}{q} - \frac{q}{\pi} - \frac{k_0^2}{\pi q} \right)^{n+1}}$$

wird die rechte Seite von (17) gleich

$$(17a) \quad -\frac{(2l+1)!}{(-2i\pi)^l} \cdot \frac{1}{\pi q} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+l+1)} \cdot \int R P_l \sin \vartheta d\vartheta.$$

Die Anwendung dieser Beziehung zur Berechnung der $A_1^{(1)}$ gelingt, wenn man analog zu I durch Differentiationen nach k_0 , q oder $\cos \vartheta$ störende Faktoren in den Integralen wegschafft. Man erhält

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} N_0 e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)} \Gamma(n+1) \frac{|\Gamma(n+l)|}{\Gamma(n+l)} \\ &\quad \cdot \left\{ \sqrt{1-\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1+i_0} \int P_{l-1} \sin \vartheta d\vartheta \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1-i_0} \int P_l \sin \vartheta d\vartheta \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{R}{q} \right) \right\}, \\ A_2^{(1)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} N_0 e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)} \Gamma(n+1) \frac{|\Gamma(n+l)|}{\Gamma(n+l)} \\ &\quad \cdot \left\{ \sqrt{1-\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1+i_0} \int P_l \sin \vartheta d\vartheta \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1-i_0} \int P_{l-1} \sin \vartheta d\vartheta \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{R}{q} \right) \right\}, \\ A_3^{(1)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} N_0 e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)} \Gamma(n+1) \frac{|\Gamma(n+l)|}{\Gamma(n+l)} \\ &\quad \cdot \sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1-i_0} \int P_l \sin \vartheta d\vartheta \frac{R}{q^2} l(l+1), \\ A_4^{(1)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} N_0 e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)} \Gamma(n+1) \frac{|\Gamma(n+l)|}{\Gamma(n+l)} \\ &\quad \cdot \sqrt{1+\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1-i_0} \int P_{l-1} \sin \vartheta d\vartheta \frac{R}{q^2} l(l-1). \end{aligned} \right.$$

1) Verwechslungen dieses σ mit dem durch (12) definierten Spinoperator σ sind wohl nicht zu befürchten.

Geht man mit diesen Ausdrücken in (3) ein, so heben sich zwar die das l enthaltenden Gammafunktionen heraus, das Fourierrtheorem für die Kugelfunktionen läßt sich aber noch nicht unmittelbar zur Aufsummierung verwenden; man muß vielmehr erst immer zwei geeignete Glieder in (3) zusammenfassen. So ergibt die Berechnung von $F_1^{(1)}$ als Faktor des Ausdrucks mit $\sqrt{1-\sqrt{1-\beta^2}}\sqrt{1+j_0}$ die Summe

$$(21) \quad \left\{ \sum_l \left\{ l P_l \int P_{l-1} \sin \vartheta d\vartheta \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right) + l P_{l-1} \int P_l \sin \vartheta d\vartheta \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right) \right\} \right\};$$

ändert man im ersten Gliede Summationsindex l in $l+1$, so erhält man:

$$(21a) \quad \left\{ \sum \left\{ (l+1) P_{l+1} + l P_{l-1} \right\} \int P_l \sin \vartheta d\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right) \right. \\ = \sum (2l+1) \cos \vartheta P_l \int P_l \sin \vartheta d\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right) \\ \left. = 2 \cos \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right) \right\}.$$

In analoger Weise lassen sich auch die anderen Ausdrücke umformen¹⁾; man findet nach kurzer Rechnung:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1^{(1)} &= C f q^2 i \left[\sqrt{1+j_0} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial k_0} + \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \sqrt{1-j_0} \frac{\partial}{\partial q} \right] \frac{R}{q}, \\ F_2^{(1)} &= C f q^2 i \left[\sqrt{1+j_0} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial k_0} \right] \frac{R}{q}, \\ F_3^{(1)} &= C f q^2 \left[\sqrt{1-j_0} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \sqrt{1+j_0} \frac{\partial}{\partial k_0} \right] \frac{R}{q}, \\ F_4^{(1)} &= C f q^2 \left[-\sqrt{1-j_0} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial q} \right] \frac{R}{q}, \\ G_1^{(1)} &= 0, \\ G_2^{(1)} &= C f i \frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \sqrt{1-j_0} \sin \vartheta \frac{\partial R}{\partial \cos \vartheta}, \\ G_3^{(1)} &= C f \sqrt{1-j_0} \sin^2 \vartheta \frac{\partial R}{\partial \cos \vartheta}, \\ G_4^{(1)} &= C f \sqrt{1-j_0} \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial R}{\partial \cos \vartheta}, \end{aligned} \right.$$

1) Wegen der verwendeten Relationen zwischen den Kugelfunktionen vgl. z. B. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 80 und 81.

wobei die Abkürzungen verwendet wurden:

$$(23) \quad f = \frac{e^{i\pi r}}{r^{l+n}}, \quad C = \frac{\pi e A N_0}{2 h c \sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(n+1) e^{\frac{i\pi n}{2}}}{(2\pi)^n \cdot q^2}.$$

Ähnlich, wenn auch nicht so einfach, verläuft die Rechnung für die $F_v^{(2)}$ und $G_v^{(2)}$. Die Erhöhung der Schwierigkeit hat ihren Grund darin, daß der zweite Index $2l+1$ der hypergeometrischen Funktionen in $U^{(2)}$ und $V^{(2)}$ ungerade ist. Dadurch wird in ihrer Integraldarstellung (16) ein neuer Pol im Unendlichen bedingt und damit eine dritte Singularität im Integral über ϑ beim Versuch einer Umformung entsprechend der Beziehung (17). Man kann diese Schwierigkeit dadurch umgehen — und darin liegt der Kunstgriff, der die Fortführung der Rechnungen von I ermöglicht —, daß man die Ausführung der r -Integration hinausschiebt und zuerst, entsprechend der Beziehung (21), zwei korrespondierende Ausdrücke in den Summen $F_v^{(2)}$ und $G_v^{(2)}$ unter Berücksichtigung von (15) zusammenfaßt. Man erhält auf diese Weise in den Störungsintegralen hypergeometrische Funktionen mit geradem zweiten Index, so daß man nun die Beziehung (17) und (17a), sowie die ihr entsprechende

$$(17b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int P_l r^{l+1} F(n+l, 2l+2, -2i\pi r) \cdot e^{-k_0 r + i\pi r + iqr \cos \vartheta} \\ & \cdot dr \sin \vartheta d\vartheta = \frac{(2l+1)!}{(-2i\pi)^{l+1}} \frac{2i}{q} (\sigma^2 - 1)^{n-1} \left(\frac{q}{\pi}\right)^{n-1} \\ & \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+l)} \int \frac{P_l \sin \vartheta d\vartheta}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{\pi}{q} - \frac{q}{\pi} - \frac{k_0^2}{\pi q}\right)^n} \end{aligned} \right.$$

anwenden kann. Man muß jedoch noch, um störende Faktoren wie r , $1/r$, $\cos \vartheta$ usw. wegzuschaffen, wie oben nach k_0 und q differenzieren, bzw. nach k_0 integrieren. Man erhält nach etwas längeren Rechnungen die Formeln:

$$F_1^{(2)} = C f q^2 i \left[-\sqrt{1+j_0}(1+\sqrt{1-\beta^2}) \frac{\partial}{\partial k_0} \cdot (P \cos \vartheta + Q \sin^2 \vartheta) - \sqrt{1-j_0} \beta \frac{\partial}{\partial q} P \right],$$

$$F_2^{(2)} = C f q^2 i \left[-\sqrt{1+j_0}(1+\sqrt{1-\beta^2}) \frac{\partial}{\partial k_0} \cdot (P \sin \vartheta - Q \sin \vartheta \cos \vartheta) - \sqrt{1-j_0} \beta \frac{\partial}{\partial q} Q \sin \vartheta \right],$$

$$F_3^{(2)} = C f q^2 \left[-\sqrt{1-j_0}(1-\sqrt{1-\beta^2}) \frac{\partial}{\partial q} \cdot (P \cos \vartheta + Q \sin^2 \vartheta) - \sqrt{1+j_0} \beta \frac{\partial}{\partial k_0} P \right],$$

$$F_4^{(2)} = C f q^2 \left[\sqrt{1-j_0}(1-\sqrt{1-\beta^2}) \frac{\partial}{\partial q} \cdot (P \sin \vartheta - Q \sin \vartheta \cos \vartheta) + \sqrt{1+j_0} \beta \frac{\partial}{\partial k_0} Q \sin \vartheta \right],$$

$$G_1^{(2)} = C f q i \cdot \sqrt{1-j_0} \beta \sin^2 \vartheta \frac{\partial Q}{\partial \cos \vartheta},$$

$$G_2^{(2)} = C f q i \cdot -\sqrt{1-j_0} \beta \sin \vartheta \left(\frac{\partial P}{\partial \cos \vartheta} - Q \right),$$

$$G_3^{(2)} = C f q \cdot -\sqrt{1-j_0}(1-\sqrt{1-\beta^2}) \cdot \left[\sin^2 \vartheta \left(\frac{\partial P}{\partial \cos \vartheta} - Q \right) - \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \frac{\partial Q}{\partial \cos \vartheta} \right],$$

$$G_4^{(2)} = C f q \cdot -\sqrt{1-j_0}(1-\sqrt{1-\beta^2}) \cdot \left[\sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{\partial P}{\partial \cos \vartheta} - Q \right) + \sin^2 \vartheta \frac{\partial Q}{\partial \cos \vartheta} \right],$$

wobei P und Q Abkürzungen für die beiden Integrale

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{i n}{q^2} \int_{k_0}^{\infty} \frac{d k_0 (\sigma + \cos \vartheta) (\sigma^2 - 1)^{n-1} \left(\frac{q}{x} \right)^n}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{x}{q} - \frac{q}{x} - \frac{k_0^2}{x q} \right)^{n+1}}, \\ Q &= \frac{i n}{q^2} \int_{k_0}^{\infty} \frac{d k_0 (\sigma^2 - 1)^{n-1} \left(\frac{q}{x} \right)^n}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{x}{q} - \frac{q}{x} - \frac{k_0^2}{x q} \right)^{n+1}} \end{aligned} \right.$$

darstellen.

Die Formeln (22) und (24) gelten streng bis auf die obige Vereinfachung des Ersatzes von j durch l . Eine Weiterrechnung in geschlossener Form ist nicht möglich, da sich die Integrale nach k_0 nicht mehr streng ausführen lassen (k_0 tritt im Zähler und Nenner der Integranden quadratisch auf). Man könnte hier durch numerische Auswertung der Integrale mit beliebiger Genauigkeit weiterkommen. Wir wollen jedoch diesen etwas umständlichen Weg nicht einschlagen, sondern uns weiterhin auf die näherungsweise Durchrechnung des Problems unter Verwendung von Reihenentwicklungen beschränken.

3. Näherungslösungen für spezielle Fälle

a) Grenzfall hoher Geschwindigkeiten ($v \sim c$)

Definitionsgemäß gilt $n = \frac{\alpha Z}{i\beta}$; ist nun β von der Größenordnung 1, so erscheint es bei nicht zu hoher Kernladungszahl angezeigt und erlaubt, die Ausdrücke (22) und (24) nach steigenden Potenzen von n zu entwickeln. Es sei daran erinnert, daß wir bereits früher Glieder von der Ordnung $\alpha^3 Z^3$ gegen 1 vernachlässigten, indem wir j durch l ersetzten; hier wollen wir noch einen Schritt weiter gehen und uns auf die niedrigste Potenz von n in der Entwicklung beschränken.¹⁾

Betrachten wir in dieser Hinsicht zuerst die Ausdrücke (22). Wegen $j_0 = \sqrt{1 + \alpha^2 Z^2}$ gilt in dieser Näherung:

$$(26) \quad \sqrt{1 + j_0} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{1 - j_0} = \frac{\alpha Z}{\sqrt{2}}.$$

Andererseits tritt bei der Ausführung von $\frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right)$ der Faktor k_0 auf $\left(i n = \frac{k_0}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$, der bewirkt, daß $\frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{R}{q} \right)$ um die Ordnung αZ kleiner ist als $\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{R}{q} \right)$ und $\frac{\partial R}{\partial \cos \vartheta}$. Dieser Größenordnungsunterschied wird gerade durch die Faktoren $\sqrt{1 \pm j_0}$ kompensiert. Die Klammerausdrücke in $F_v^{(1)}$ und $G_v^{(1)}$ sind demnach gerade von der Ordnung αZ .

Bei der Berechnung von $F_v^{(2)}$ und $G_v^{(2)}$ können die Integranden von P und Q nach Potenzen von n entwickelt und

1) Die Berechnung des nächsten Gliedes der Entwicklung ist zwar durchführbar, ergibt jedoch sehr komplizierte Ausdrücke, die der Kürze halber hier nicht angeschrieben wurden.

gliedweise integriert werden. Wegen des Faktors n sind diese Größen, auch nach Ausführung der Integration, von der Ordnung n . Daher sind alle Glieder, die $\sqrt{1-\beta_0}$ als Faktor besitzen, klein von höherer Ordnung gegenüber $F_v^{(1)}$ und $G_v^{(1)}$. Von erster Ordnung sind nur die Beiträge, die von den Gliedern mit $\sqrt{1+\beta_0}$ herrühren. Hier treten durchwegs Differentiationen nach k_0 auf, die sich gegen die Integrationen nach k_0 in P und Q kompensieren.

Faßt man die beiden Funktionensysteme (22) und (24) zusammen und berücksichtigt die Definitionsgleichungen

$$(27) \quad \begin{cases} q = \frac{2\pi}{hc} \cdot m c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \\ k = \frac{2\pi}{hc} \cdot m c^2 \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ k_0 = \frac{2\pi}{hc} \cdot m c^2 \cdot \alpha Z, \end{cases}$$

so erhält man auf Grund des eben Gesagten die folgenden Ausdrücke für die F_v und G_v :

$$(28) \quad \begin{cases} F_1 = \frac{C f \alpha Z \beta^2 \sin \vartheta}{2 \sqrt{2} (1 - \beta \cos \vartheta)^2} \cdot i \left[- \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin \vartheta \right], \\ F_2 = \quad \quad \quad \cdot i \left[\frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \vartheta \right. \\ \quad \quad \quad \left. - \frac{(1 + \sqrt{1 - \beta^2})(1 - 2\sqrt{1 - \beta^2})}{\beta \sqrt{1 - \beta^2}} \right], \\ F_3 = \quad \quad \quad \left[- \frac{1 - 2\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sin \vartheta \right], \\ F_4 = \quad \quad \quad \left[- \frac{1 - 2\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cos \vartheta \right. \\ \quad \quad \quad \left. + \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^2}{\beta \sqrt{1 - \beta^2}} \right], \\ G_1 = \quad \quad \quad \cdot 0, \\ G_2 = \quad \quad \quad \cdot -i \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}, \\ G_3 = \quad \quad \quad \cdot -\sin \vartheta, \\ G_4 = \quad \quad \quad \cdot -\cos \vartheta. \end{cases}$$

Geht man mit diesen Werten in die Gleichungen (2) ein, so erhält man die (asymptotischen Werte der) Wellenfunktionen des Photoelektrons.

Auf Grund von (11) ergibt sich

$$(29) \quad \begin{cases} H = \frac{C C^* \alpha^2 Z^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4} \left[(1 - \beta^2) - \frac{1}{2} (1 - \beta \cos \vartheta) \cdot \left((1 - \sqrt{1 - \beta^2}) - \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right], \\ K = - \frac{C C^* \alpha^2 Z^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4} \left[(1 - \beta^2) - \frac{1}{2} (1 - \beta \cos \vartheta) \cdot (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \right], \\ M = 0 \end{cases}$$

und damit für beide Funktionen ψ_1 und ψ_2 der gleiche Stromausdruck:

$$(30) \quad \begin{cases} S_r = 2 e v C C^* \cdot \alpha^2 Z^2 \beta^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{r^3} \left[\frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4} \right. \\ \left. - \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \sin^2 \vartheta}{2 \sqrt{1 - \beta^2} (1 - \beta \cos \vartheta)^3} + \frac{(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^2}{4 (1 - \beta^2) (1 - \beta \cos \vartheta)^3} \right]. \end{cases}$$

Die Diskussion dieser Formel wird im 4. Kapitel durchgeführt werden.

b) Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten ($\beta^2 \ll 1$)

In diesem Falle wird eine Entwicklung nach n schlecht oder überhaupt nicht konvergieren. Hier ist offenbar eine Entwicklung nach steigenden Potenzen von β angezeigt. Allerdings ist es sehr umständlich, eine solche für die Integrale P und Q durchzuführen.

Schneller kommt man in diesem Falle zum Ziel, wenn man direkt auf die Störungsintegrale (4) zurückgeht und bereits dort eine entsprechende Entwicklung durchführt. Und zwar ersetzen wir im Anschluß an Sommerfeld und Schar den Retardierungsfaktor $e^{i q r \cos \vartheta}$ näherungsweise durch

$$1 + i q r \cos \vartheta + \dots,$$

wodurch wir im Resultat, wie im nichtrelativistischen Fall, die ersten zwei Glieder einer Entwicklung nach steigenden

Potenzen von β erhalten. Ein Abbrechen der Reihe für $e^{iqr \cos \vartheta}$ nach dem zweiten Glied ist äquivalent einem Weglassen der relativistischen Glieder, d. h. der Glieder von der Ordnung β^2 .

Führt man nun in den A_j zuerst die ϑ -Integration aus, so sind A_1 und A_3 nur dann von Null verschieden, wenn $l = 1$ oder 2, A_2 und A_4 nur, wenn $l = 2$ oder 3, bzw. 1 ist. Die Ausführung der Integration über r führt auf (nichtentartete) hypergeometrische Funktionen, die sich wegen

$$(31) \quad F(a, \gamma; \gamma; x) = \frac{1}{(1-x)^a}$$

in geschlossener Form anschreiben lassen.¹⁾ Durch Einführen der A_j in die Reihen für F_j und G_j , die sich dann auf wenige Glieder reduzieren, erhält man unter konsequenter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung β^2 nach leichter Rechnung die Ausdrücke:

$$(32) \quad \begin{cases} F_1 = 0, \\ F_2 = \frac{C' f a Z \beta}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \cdot i[1 + (2+n)\beta \cos \vartheta], \\ F_3 = \frac{C' f a Z \beta}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \cdot \frac{\beta}{2} \sin \vartheta, \\ F_4 = \frac{C' f a Z \beta}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \cdot \frac{\beta}{2} \cos \vartheta, \\ G_1 = 0, \\ G_2 = \frac{C' f a Z \beta}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \cdot -i[1 + (2+n)\beta \cos \vartheta], \\ G_3 = \frac{C' f a Z \beta}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \cdot -\frac{\beta}{2} \sin \vartheta, \\ G_4 = \frac{C' f a Z \beta}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \cdot -\frac{\beta}{2} \cos \vartheta. \end{cases}$$

1) Auch hier wurde, wie oben, j durch l ersetzt, um geschlossene Ausdrücke zu erhalten; andernfalls würden sich in (31) das zweite und dritte Argument um Größen von der Ordnung $l-j \sim \frac{a^2 Z^2}{2l}$ unterscheiden.

f hat die gleiche Bedeutung wie in (23) und C' hängt mit C durch die Beziehung

$$(33) \quad \begin{cases} C' = C \cdot (1 + n) e^{-2i n \arctg \frac{n}{k_0}} \\ = \frac{e A}{2 h c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{N_0}{(2\pi)^n} \frac{\Gamma(n+2)}{q^2} e^{\frac{i\pi n}{2} - 2i n \arctg \frac{1}{i n}} \end{cases}$$

zusammen.

Man bemerkt leicht die Analogie zwischen den Formeln (28) und (32); vernachlässigt man in (28) Glieder von der Ordnung β^2 gegen Eins, so erhält man die Formeln (32), nur mit C an Stelle von C' : da jedoch die Ausdrücke (28) nur die Anfangsglieder einer Entwicklung nach Potenzen von n darstellen, so ist dieser Unterschied verständlich (C stellt das Anfangsglied einer Entwicklung von C' nach n dar). Wir werden auf diese Verhältnisse noch später zurückkommen.

Aus (32) erhält man nach (11)

$$(34) \quad \begin{cases} H = C' C'^* \alpha^2 Z^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta (1 + 4\beta \cos \vartheta + \dots), \\ K = -C' C'^* \alpha^2 Z^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta (1 + 4\beta \cos \vartheta + \dots), \\ M = 0 \end{cases}$$

und damit wegen (10) den Strom

$$(35) \quad S_r = 2 e v C' C'^* \alpha^2 Z^2 \beta^2 \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{r^2} (1 + 4\beta \cos \vartheta + \dots),$$

für den man in gleicher Näherung auch schreiben kann

$$(35a) \quad S_r = 2 e v C' C'^* \alpha^2 Z^2 \beta^2 \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4},$$

in Übereinstimmung mit der auf Grund der Schrödingergleichung abgeleiteten Intensitätsformel.¹⁾

4. Intensitätsverteilung und Absorptionskoeffizient

Zur Diskussion der Intensitätsformeln (30) und (35) schreiben wir sie hier nochmals an. Die relativistische Formel lautet:

1) Vgl. A. Sommerfeld u. G. Schur, J. Fischer, F. Sauter; (35) und (35a) unterscheiden sich von den Formeln dieser Autoren nur um Größen von der Ordnung β^2 .

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} S_r &= 2ev\alpha^2 Z^2 C C^* \frac{\beta^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \left[\frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin^2 \varphi}{(1-\beta \cos \vartheta)^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\sqrt{1-\beta^2}) \sin^2 \varphi}{2\sqrt{1-\beta^2} (1-\beta \cos \vartheta)^3} + \frac{(1-\sqrt{1-\beta^2})^2}{4(1-\beta^2)(1-\beta \cos \vartheta)^3} \right], \end{aligned} \right.$$

die nichtrelativistische

$$(35) \quad S_r = 2ev\alpha^2 Z^2 C^* C' \frac{\beta^2}{r^2} \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{(1-\beta \cos \vartheta)^4}.$$

Diese beiden Formeln gehen ineinander über, wenn man in der ersten die relativistischen Glieder der Ordnung β^2 , in der zweiten die höheren Potenzen bei einer Entwicklung nach n vernachlässigt. Die erste Formel wurde, um es nochmals zu betonen, unter der Voraussetzung $\beta \sim 1$ abgeleitet, gilt also mehr oder minder für den ganzen Bereich der relativistischen Geschwindigkeiten; die zweite hingegen gilt für alle Geschwindigkeiten, für die die Voraussetzung $\beta^2 \ll 1$ noch einigermaßen erfüllt ist. Für das Zwischengebiet kann man in Anbetracht der weitgehenden Analogie zwischen (30) und (35) wohl unbedenklich interpolieren.

Über den allgemeinen Bau von (30) ist folgendes zu sagen: Die Intensitätsverteilung der Photoelektronen stellt sich mathematisch dar als Summe dreier Glieder, von denen die beiden ersten den Faktor $\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi$ besitzen und daher — bei Fehlen des Nenners $1 - \beta \cos \vartheta$ — eine vorwiegende Intensitätsverteilung in der Richtung des elektrischen Vektors bedingen; der Nenner bringt eine Asymmetrie in diese Verteilung, die sich in Form einer „Voreilung der Photoelektronen“ äußert. Über diese beiden Glieder überlagert sich ein drittes Glied, das nur mit $\sin^2 \vartheta$ multipliziert ist und daher von der Polarisationsrichtung des Lichtes nicht abhängt; wie dieses Glied zu deuten ist, ist mir nicht klar. Wichtig und sehr befriedigend ist, daß alle drei Glieder für $\vartheta = 0^\circ$ und 180° verschwinden, daß also in der Fortschreitungsrichtung des Lichtes keine Elektronenemission stattfindet.

Es dürfte von Interesse sein, kurz auf die relative Größe der drei Glieder von (30) und ihren Einfluß auf die Intensitätsverteilung einzugehen. Die Faktoren $1 - \sqrt{1-\beta^2}$ im zweiten und dritten Glied bewirken, daß bei nicht zu großem β , also bis etwa $\beta \sim 0,5$ der erste Term dominiert. Dies äußert sich

besonders deutlich bei der Berechnung des Halbierungswinkels ϑ_0 , d. h. des Öffnungswinkels desjenigen Kreiskegels um die Strahlrichtung, innerhalb dessen die Hälfte aller Photoelektronen austreten:

$$(36) \quad \int_0^{\vartheta_0} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \cdot S_r = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \cdot S_r.$$

Diese Beziehung führt auf eine transzendente Gleichung für $\cos \vartheta_0$, die sich jedoch leicht näherungsweise lösen läßt; würde bloß der erste Term der eckigen Klammer bestehen, so wäre die strenge Lösung von (36)

$$(37) \quad \cos \vartheta_0 = \beta.$$

Mit diesem Wert als erste Näherung findet man dann leicht durch sukzessive Approximation den genauen Wert von $\cos \vartheta_0$. Wie wenig die beiden letzten Glieder von (30) an dem durch (37) gegebenen Wert des Halbierungswinkels ändern, sieht man an folgendem Beispiel: Für $\beta = 0,52$ wird die genaue Lösung von (36) gegeben durch $\cos \vartheta_0 = 0,5133$ und damit durch $\vartheta_0 = 59^\circ 7'$, welcher Wert von dem aus (37) bestimmten nur um 0,8 Proz. abweicht. Der angegebene Wert von β entspricht den Experimenten von E. Lutze¹⁾, der aus seinen Messungen den Halbierungswinkel $\vartheta_0 = 58^\circ$, in guter Übereinstimmung mit der Theorie gefunden hat.

Aus diesen Feststellungen geht hervor, daß für die Intensitätsverteilung bis zu sehr hohen Geschwindigkeiten vorwiegend das erste Glied von (30) maßgebend ist; auch für sehr harte Röntgenstrahlen könnte man daher die Intensitätsverteilung ohne wesentlichen Fehler aus dem ersten Glied von (30) allein berechnen:

$$(38) \quad S_r \sim \frac{\text{const}}{r^2} \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4}.$$

Dieser Formel sei diejenige gegenübergestellt, die man bei strenger Durchrechnung des Problems auf Grund der Schrödingergleichung erhält:

$$(38a) \quad S_r \sim \frac{\text{const}}{r^2} \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta + \frac{\hbar \nu}{2 m c^2}\right)^4},$$

1) E. Lutze, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 853. 1931.

wobei v hier die nichtrelativistisch berechnete Geschwindigkeit darstellt (sie ist bei Lutze $= 0,585 \cdot c$). Ist nun

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h\nu}{2mc^2}\right)}$$

ungefähr gleich groß, wie die relativistische Geschwindigkeit β , so wird auch angenähert die Formel (38a) bei konsequenter nichtrelativistischer Rechnung die richtige Intensitätsverteilung und den richtigen Halbierungswinkel ergeben. Dies ist wohl mit ein Grund der guten Übereinstimmung in der Arbeit von Lutze zwischen seinen Meßergebnissen und den von ihm streng nichtrelativistisch auf Grund der Intensitätsformel von Fischer errechneten Werten bei Geschwindigkeiten, die unbedingt eine relativistische Rechnung erfordern würden.

Die Gesamtzahl der pro Zeiteinheit emittierten Photoelektronen erhält man durch Integration des radialen Stromes über die Kugelfläche und Division durch Elementarladung e :

$$(39) \quad \left\{ N = \frac{1}{e} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_r \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2v\pi \cdot \frac{CC^* \alpha^2 Z^2 \beta^2}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{4}{3} + \frac{1-2\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}(1+\sqrt{1-\beta^2})} \left(1 + \frac{1-\beta^2}{2\beta} \log \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right] \right\}.$$

Die beiden „relativistischen“ Glieder in (30) ergeben hier zusammen das zweite Glied in der eckigen Klammer, dem „nichtrelativistischen“ Glied entspricht der Term $\frac{4}{3}$, der auch auf Grund von (35) resultiert.¹⁾

Aus dieser Formel erhält man nun in bekannter Weise den atomaren Absorptionskoeffizient τ_K der K-Schale; multipliziert man die Anzahl N der Quantenprozesse mit der Energie $h\nu$ eines Lichtquants und ferner mit dem Faktor 2, entsprechend den beiden Elektronen der K-Schale, so erhält man die dem Pri-

1) Eine Reihenentwicklung des Ausdruckes

$$1 + \frac{1-\beta^2}{2\beta} \log \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{2\beta^2}{3} + \dots$$

zeigt, daß das zweite Glied der eckigen Klammer von (39) in der Tat mit β^2 geht, also zum ersten als relativistische Korrektur hinzutritt.

märstrahl pro Zeiteinheit entzogene Energie; dividiert man diese durch die Energie $\frac{E^2 c}{8\pi}$ der einfallenden Lichtwelle, wobei der Betrag E des elektrischen Vektors mit dem Vektorpotential A der Störungsfunktion (1) durch die Beziehung $A = \frac{c E}{2\pi \nu}$ verknüpft ist, so ergibt sich τ_n in der Form

$$\tau_n = \frac{2h\nu N}{E^2 c} = \frac{8N}{\frac{2\pi}{h c} A^2 \nu}.$$

Führt man hier den Ausdruck (39) ein und berücksichtigt die Bedeutung von C , so erhält man ¹⁾

$$(40) \left\{ \begin{aligned} \tau_n &= \frac{8\nu_0^3 c^2}{\pi \nu^5 Z} \frac{\beta^3}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \\ &\cdot \left[\frac{4}{3} + \frac{(1-2\sqrt{1-\beta^2})}{\sqrt{1-\beta^2}(1+\sqrt{1-\beta^2})} \left(1 + \frac{1-\beta^2}{2\beta} \log \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

wobei ν_0 die Frequenz $\frac{\alpha^2 Z^2 m c^2}{2h}$ der K -Absorptionskante bedeutet. Bei nichtrelativistischer Rechnung im Anschluß an (35) ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck wie (40), nur fällt der zweite Summand in der eckigen Klammer als Glied von relativistischer Größenordnung fort, dafür tritt aber wegen des Unterschiedes von C und C' der Faktor

$$(41) \left\{ \begin{aligned} F &= |I(2+n)|^2 e^{i\pi n - 4i n \operatorname{arctg} \frac{1}{in}} \\ &= (1+|n|^2) \frac{i n \pi}{\sinh i n \pi} \cdot e^{i n \pi - 4i n \operatorname{arctg} \frac{1}{in}} \end{aligned} \right.$$

hinzu, so daß man in nichtrelativistischer Näherung die Formel

$$(42) \quad \tau_n = \frac{64\beta}{3\pi} \cdot \frac{\nu_0^3 c^2}{\nu^5 Z} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda} \cdot \frac{i n \pi}{\sinh i n \pi} \cdot e^{i n \pi - 4i n \operatorname{arctg} \frac{1}{in}}$$

erhält, die mit der von Stobbe bzw. Fischer abgeleiteten identisch ist $\left(\lambda_c = \frac{h}{m c} \right)$.

Über die Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten kann man folgende Aussagen machen: Aus der nichtrelativistischen Formel (42) ergibt sich ²⁾:

1) Der Faktor $e^{\frac{i\pi n}{2}} |I(1+n)|^2$ ist in der betrachteten Näherung durch 1 zu ersetzen.

2) Vgl. M. Stobbe, a. a. O. S. 696.

1. Für $\nu \sim \nu_0$ gilt $\beta \ll \alpha Z$, daher $|n| \gg 1$, es wird

$$F = \frac{4 \lambda_c \alpha Z \pi}{\lambda \beta^3} e^{-4}$$

und damit

$$(43a) \quad \tau_n \sim \frac{16}{3} \cdot \alpha^7 Z^6 e^{-4} \cdot \frac{\lambda^4}{\lambda_c^3} \sim 1820 \cdot \lambda^4 Z^6 \text{ cm}^2.$$

2. Für $\nu \gg \nu_0$, aber $\beta^2 \ll 1$ wird F angenähert $\sim \frac{2\lambda_c}{\lambda \beta^2} \sim 1$; daraus ergibt sich

$$(43b) \quad \tau_n \sim \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \alpha^6 Z^5 \cdot \frac{\lambda^{7/2}}{\lambda_c^{5/2}} \sim 47,8 \lambda^{7/2} Z^5 \text{ cm}^2.$$

Zur Diskussion der relativistischen Formel betrachten wir zuerst die beiden Grenzfälle $\lambda \gg \lambda_c$ und $\lambda \ll \lambda_c$.

1. $\lambda \gg \lambda_c$. Dieser Fall ist als nichtrelativistischer Grenzfall von (40) zu verstehen; aus der photoelektrischen Gleichung folgt nämlich wegen $\frac{\lambda_c}{\lambda} \ll 1$ auch $\beta^2 \ll 1$. In diesem Falle geht die Absorptionsformel (40) bis auf den Faktor F in die nichtrelativistische Formel (42) über und daher gilt in diesem Falle das eben Gesagte.

2. $\lambda_c \gg \lambda$. Dies bedeutet, daß die Energie des einfallenden Lichtquants und damit die kinetische Energie des auslaufenden Elektrons sehr viel größer ist als die Ruheenergie des Elektrons ($h\nu \gg mc^2$). Die photoelektrische Gleichung vereinfacht sich in diesem Falle zu

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} \sim \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ferner kann in (40) $\sqrt{1-\beta^2}$ gegen 1 gestrichen und β selbst gleich 1 gesetzt werden; in gleicher Näherung kann das logarithmische Glied im zweiten Summanden von (40) gegen 1 und der erste Summand in der eckigen Klammer gegen den zweiten gestrichen werden; es ergibt sich

$$(43c) \quad \tau_n \sim \frac{\alpha^6 Z^5}{\pi} \lambda \lambda_c \sim 1,16 \cdot 10^{-23} \cdot \lambda Z^5 \text{ cm}^2.$$

Zwischen diesen Grenzwerten nimmt der Absorptionskoeffizient stetig ab; bemerkenswert ist das allmähliche Überwiegen des zweiten Gliedes der eckigen Klammer gegenüber dem ersten. Es ist also für extrem kurzwellige Strahlung inkorrekt, den Ab-

sorptionskoeffizienten durch Extrapolation der für das Röntgengebiet gültigen Formel zu ermitteln; denn erstens fällt schon das „nichtrelativistische“ Glied in einer Weise ab, daß der Exponent $n(\lambda)$ des experimentell gefundenen λ^n -Gesetzes für den Absorptionskoeffizienten vom Werte 4 (an der Absorptionskante) allmählich bis zum Wert 2 (für den Grenzfall $\lambda \ll \lambda_c$) abnimmt; andererseits gewinnt das relativistische Zusatzglied von rund $\lambda \sim \lambda_c = 0,0242 \text{ \AA E}$ immer mehr an Bedeutung, so daß es z. B. für $\lambda \sim 5 X E$ bereits ungefähr doppelt so groß ist als das nichtrelativistische Glied.

Es besitzt einiges Interesse, die obige Formel für den K -Absorptionskoeffizient mit der Formel von Klein und Nishina¹⁾ für den Streukoeffizienten von freien Elektronen zu vergleichen, die bei hinreichender Härte der Primärstrahlung bekanntlich auch auf die Streuung an den im Atom gebundenen Elektronen angewendet werden darf; die Formel lautet (bezogen auf die Z -Atomelektronen)

$$(44) \left\{ \sigma_A = \frac{2\pi e^4}{m^2 c^4} Z \cdot \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log(1+2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \log(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\} \right.$$

$\left. \left(\alpha = \frac{\lambda_c}{\lambda}, \text{ nicht, wie früher, die Feinstrukturkonstante} \right) \right\}$. Für langwellige Strahlung gibt diese Formel bekanntlich den Thomsonschen Streukoeffizienten

$$\sigma_A = \frac{8\pi e^4 Z}{3 m^2 c^4} = 0,66 \cdot 10^{-20} \cdot Z.$$

Bei abnehmender Wellenlänge nimmt σ_A erst langsam, später schnell ab und zwar so, daß eine Überschneidung der Kurven für σ_A und τ_K bei einer bestimmten Wellenlänge eintritt. Bei extrem langwelliger Strahlung überwiegt bekanntlich die lichtelektrische Absorption größenordnungsmäßig die Schwächung des Primärstrahles durch Streuung, bei extrem harter Strahlung liegen die Verhältnisse umgekehrt, so daß man mitunter geneigt ist, im γ -Strahlgebiet den Energieverlust des Primärstrahles durch Photoeffekt gegenüber dem durch Comptonstreuung zu vernachlässigen. Daß man jedoch bei diesem Schlusse vorsichtig

1) O. Klein u. Y. Nishina, Ztschr. f. Phys. 52. S. 853. 1929.

sein muß, zeigt die folgende Tabelle, die durch Einsetzen der Wellenlänge $\lambda = 4,7 \text{ XE}$ des RaC in (40) und (44) gewonnen wurde:

	Z	τ_K	σ_A
Al	13	$2,7_5 \cdot 10^{-28}$	$1,6 \cdot 10^{-24}$
Sn	50	$2,4 \cdot 10^{-25}$	$6,2 \cdot 10^{-24}$
Pb	82	$2,5_5 \cdot 10^{-24}$	$10,2 \cdot 10^{-24}$

Während demnach für diese Wellenlänge bei leichteren Elementen τ_K im Schwächungskoeffizienten ohne besonderen Fehler gegenüber σ_A vernachlässigt werden kann, ist dies bei Pb sicher nicht der Fall. Dieses Resultat dürfte wohl auch trotz des Umstandes zu Recht bestehen, daß unsere Formel (40) wegen der bei ihrer Ableitung eingeführten Vernachlässigungen nur für leichtere Elemente gerechtfertigt werden kann.

Zum Schlusse dieses Abschnittes sei nochmals darauf hingewiesen, daß τ_K nur den Absorptionskoeffizienten in der K-Schale darstellt. Um den Gesamtaborptionskoeffizienten zu berechnen, müßten auch noch τ_L , $\tau_M \dots$ ermittelt werden.

Ob für extrem harte Strahlung die Verhältnisse $\frac{\tau_L}{\tau_K}, \frac{\tau_M}{\tau_K} \dots$ in gleicher Weise klein gegen 1 sind wie in der Nähe der Absorptionskante und ob daher im Gesamtkoeffizienten $\tau = \tau_K + \tau_L + \tau_M + \dots$ bei γ -Strahlen τ_K ebenso wie im Röntgengebiet dominiert, kann ohne ausführliche Berechnung von τ_L , $\tau_M \dots$ wohl nicht entschieden werden.

5. Über die Polarisation der Photoelektronen

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, haben bereits Fues und Hellmann¹⁾ auf die Möglichkeit der Erzeugung polarisierter Elektronenwellen durch Photoeffekt an gerichteten Atomen hingewiesen, da der Anteil des „Übergangsspins“, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer Umkehrung der Spinrichtung des Elektrons beim Emissionsprozeß, klein ist gegen den „Übergangstrom“, also gegen die Wahrscheinlichkeit eines Emissionsprozesses überhaupt, solange die Lichtwellenlänge groß ist gegen die de Brogliewellenlänge des ausgelösten

1) E. Fues u. H. Hellmann, a. a. O.

Photoelektrons. Wir wollen hier auf diese Frage etwas näher eingehen.

Um Aussagen über die Polarisierung der auslaufenden Elektronenwellen zu machen, muß man (vgl. oben) unter Verwendung der Wellenfunktionen (2) die Matricelemente $\frac{e}{m} \frac{h}{4\pi c} \bar{\Psi} \sigma \Psi$ bilden, wobei σ den durch (12) definierten Spinoperator bedeutet; diese Matricelemente stellen, bis auf einen Normierungsfaktor, die Erwartungswerte für die drei Komponenten des magnetischen Momentes dar.

Betrachten wir zuerst den einfacheren Fall, bei dem $\beta^2 \ll 1$ ist und daher nichtrelativistisch gerechnet werden darf. Wie aus (32) zu entnehmen ist, verschwindet wegen $F_1 = G_1 = 0$ in den Wellenfunktionen (2) stets eine der beiden „großen Funktionen“¹⁾; und zwar entsteht aus ψ_1 bzw. ψ_2 , bei der die erste (zweite) dieser beiden Funktionen verschwindet, wieder eine Funktion vom gleichen Charakter, nämlich Ψ_1 , bzw. Ψ_2 . D. h. die Spinorientierung des Elektrons ist vor und nach dem Emissionsprozeß die gleiche, Ψ_1 stellt, wie ψ_1 , ein Elektron mit der Spinrichtung parallel zur z -Achse dar, Ψ_2 , wie ψ_2 , ein solches mit entgegengesetztem Spin. Auch bei beliebiger Anfangsorientierung des Spins, dargestellt durch die Ausdrücke (13), wird diese beim Prozeß nicht geändert.²⁾

Wir wollen dieses Resultat noch auf eine andere Art ableiten, die den von Fues und Hellmann angegebenen Überlegungen weitgehend analog ist. Und zwar genügt es im Falle $\beta^2 \ll 1$ nach der Paulischen Theorie zu rechnen, in welche die Diracsche ja in nichtrelativistische Näherung übergeht. Wir haben in diesem Falle nur zwei Wellenfunktionen zu operieren, die mit den Schrödingerschen Funktionen übereinstimmen und den Spinorientierungen in

1) Es sind dies die Funktionen, die als Faktoren bei den Operatoren 1 und $\gamma_1 \gamma_3$ in (2) stehen; die anderen beiden Funktionen sind, wie auch aus (28) zu ersehen ist, gegenüber diesen klein von der Ordnung β .

2) Mathematisch gesprochen liegt der Grund darin, daß in diesen Matricelementen nur Produkte großer Funktionen mit großen, kleiner mit kleinen auftreten; die Beiträge der letzteren sind von der Ordnung β^2 , sind daher wegzulassen; das Verschwinden der einen der beiden großen Funktionen bedingt dann das gleiche Verhalten wie im Grundzustand.

der positiven, bzw. negativen z -Richtungen entsprechen mögen. Im Grundzustand lauten sie normiert

$$(45) \quad \psi_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_0^{3/2} e^{-k_0 r},$$

in einem Zustand des kontinuierlichen Spektrums

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \frac{\pi}{\pi} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \frac{|I(n+l+1)|}{(2l+1)!} \\ &\cdot e^{\frac{i\pi n}{2} - i\kappa r} (2\kappa r)^l F(-n+l+1, 2l+2, 2i\kappa r) \\ &\cdot P_l^m e^{im\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Die Durchrechnung des Photoeffektes auf Grund der Paulischen Theorie unterscheidet sich von der im Anschluß an die Schrödingergleichung dadurch, daß zur Störung der Bahnbewegung durch das Vektorpotential (1), dargestellt durch den Energieterm

$$(47a) \quad H_1 = \frac{e}{mc} (\mathfrak{A} p),$$

noch seine Wirkung

$$(47b) \quad H_2 = \frac{e}{m} \frac{\hbar}{4\pi c} (\mathfrak{S} \sigma)$$

auf das magnetische Moment des Elektrons hinzutritt. σ ist, wie oben, der Spinoperator, $\frac{e}{m} \frac{\hbar}{4\pi c} \sigma$ somit der Operator des magnetischen Momentes.

Bei der Berechnung der Matricelemente von H_1 verschwinden alle diejenigen, die einer Änderung der Spinrichtung entsprechen würden; das erste Störungsglied bewirkt daher einen Austritt der Photoelektronen unter Beibehaltung ihrer Spinorientierung. Sein Beitrag zur Wellenfunktion des auslaufenden läßt sich, genau wie in I (12) bis (16), berechnen:

$$(48a) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{4\pi e A}{\hbar c} \frac{k_0^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\kappa q^2} \frac{(\sigma^2 - 1)^n}{(2\kappa)^n} \left(\frac{q}{\kappa}\right)^n \\ &\cdot I(n+2) \frac{e^{\frac{i\pi n}{2} + i\kappa r}}{r^{1+n}} \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{\kappa}{q} - \frac{q}{\kappa} - \frac{k_0^2}{\kappa q}\right)^{n+2}}; \end{aligned} \right.$$

31*

die hier verwendete Abkürzung σ ist durch (18) gegeben, also $\sigma = -\frac{x}{q} + \frac{k_0}{iq}$ (nicht zu verwechseln mit dem Spinoperator σ).

Beim zweiten Störungsglied verschwinden alle Matrixelemente, bei denen zwei Zustände gleicher Spinrichtung kombinieren. Denn laut obiger Fortsetzung über die Bedeutung der beiden Paulischen Wellenfunktionen liegen die Erwartungswerte des Spins bei diesen Kombinationen parallel zur z -Richtung, während der magnetische Vektor in der x -Richtung schwingt, so daß das Skalarprodukt $(\sigma \hat{\xi})$ verschwindet. Bei einer Kombination von Zuständen entgegengesetzter Spinorientierung fällt der Erwartungswert des Spinoperators in die xy -Ebene, die Matrixelemente H_2 werden daher von Null verschieden sein und den allgemeinen Bau

$$H_2 = \frac{e}{m} \frac{\hbar}{4\pi c} \int \psi^* \psi_0 \hat{\xi}_x d\tau \cdot e^{i\omega}$$

besitzen, wobei $e^{i\omega}$ ein Phasenfaktor ist, der von der Schreibweise von σ_x abhängt und wegen $\sigma_x^2 = 1$ den Betrag 1 besitzt. Der durch H_2 bewirkte Beitrag von Wellenfunktion des Photoelektrons läßt sich ebenfalls wie in I ableiten; man erhält

$$(48b) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_2 &= -\frac{i\pi e A}{\hbar c \pi} k_0^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(n+1)}{(2\pi)^n} \left(\frac{q}{\pi}\right)^n \\ &\cdot \frac{e^{\frac{i\pi n}{2} + i\pi r}}{r^{n+1}} \frac{\partial}{\partial k_0} \frac{(\sigma^2 - 1)^n e^{i\omega}}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{x}{q} - \frac{q}{x} - \frac{k_0^2}{\pi q}\right)^{n+1}}. \end{aligned} \right.$$

Zusammengefaßt ergibt sich nach Ausführung der Differentiation

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{4\pi e A}{\hbar c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{k_0^{3/2}}{\pi q^2} \frac{e^{\frac{i\pi n}{2}}}{(2\pi)^n} \frac{e^{i\pi r}}{r^{1+n}} \\ &\cdot \frac{\Gamma(n+2) \cdot \left(\frac{q}{\pi}\right)^n (\sigma^2 - 1)^n}{\left(2 \cos \vartheta - \frac{x}{q} - \frac{q}{x} - \frac{k_0^2}{\pi q}\right)^{n+2}} \left\{ \begin{aligned} &\sin \vartheta \sin \varphi, \\ &\frac{i q (1 + \sigma \cos \vartheta) e^{i\omega}}{\pi (\sigma^2 - 1) (1+n)} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Die erste dieser beiden Paulifunktionen mißt somit die Stärke der Photoemission ohne Drehung der Spinorientierung des Elektrons, während die zweite ein Maß für die Häufigkeit

der Drehung der Spinrichtung beim Loslösungsprozeß des Elektrons darstellt.

Zur Beurteilung der relativen Wahrscheinlichkeit dieser Umkehrprozesse des Spins bilden wir den Absolutbetrag des zweiten Klammergliedes

$$\begin{aligned} & \left| \frac{i q}{\pi} \frac{(1 + \sigma \cos \vartheta) e^{i \omega}}{(\sigma^2 - 1)(1 + n)} \right| \\ &= \frac{q}{\pi} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\pi}{q} \cos \vartheta\right)^2 + \frac{k_0^2}{q^2} \cos^2 \vartheta}{\left[\left(\frac{k_0^2 + \pi^2 + q^2}{q^2}\right) - \frac{4 \pi^2}{q^2}\right] \left(\frac{\pi^2 + k_0^2}{\pi^2}\right)}} \\ &\sim \frac{h \nu}{2 m c^2} \sqrt{\cos^2 \vartheta - \frac{v}{c} \cos \vartheta + \frac{h \nu}{2 m c^2}}, \end{aligned}$$

wobei beim zweiten Schritt Glieder von der Ordnung v^2/c^2 und $h \nu / m c^2$ gegen 1 gestrichen wurden (nichtrelativistische Näherung!). Die Quadratwurzel ist im allgemeinen von der Ordnung 1, daher der ganze Ausdruck von der Ordnung $\frac{h \nu}{2 m c^2} \sim \left(\frac{v}{2c}\right)^2$ (bei Vernachlässigung der Ablösearbeit), also sicher von relativistischer Größenordnung und fällt daher außerhalb des Gültigkeitsbereiches der obigen Rechnung. Damit ist wiederum bewiesen, daß in nichtrelativistischer Näherung beim Photoeffekt keine Drehung der Polarisationsrichtung des Elektrons stattfindet.

Anders liegen die Verhältnisse im Falle $v \sim c$. Hier führt die Berechnung von $\bar{\Psi} \sigma \Psi$ auf Grund von (28) zu kompliziert und sehr unübersichtlich gebauten Ausdrücken, die hier der Kürze halber nicht angeführt werden mögen. Es ergibt sich jedenfalls, daß beim Loslösen des Elektrons aus dem Atomverband durch harte Strahlung im allgemeinen seine Spinrichtung gedreht wird; ein Gesetz über die Abhängigkeit der Größe dieser Drehung von der Emissionsrichtung konnte ich aus den Formeln nicht herauslesen.

Der physikalische Sachverhalt läßt sich ungefähr folgendermaßen darstellen: Bekanntlich führt die magnetische Achse des Elektrons — in klassischer Ausdrucksweise — eine Präzessionsbewegung um die Richtung der jeweils wirkenden magnetischen Feldstärke \mathfrak{H} aus. Diese bestimmt sich aus den Feldvektoren \mathfrak{E} und \mathfrak{H} , sowie aus dem Geschwindigkeits-

vektor \mathbf{v} des Elektrons: $\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{E}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Im allgemeinen Fall, d. h. bei beliebiger Emissionsrichtung fallen die Richtungen von \mathfrak{S} und $[\mathbf{v} \mathfrak{E}]$ nicht zusammen, daher wird sich wegen der Veränderlichkeit von \mathbf{v} während des Emissionsprozesses die Richtung von \mathfrak{S}' und damit die Achse der Präzessionsbewegung des magnetischen Momentes kontinuierlich ändern. In diesem Falle darf man daher nicht erwarten, eine einigermaßen einfache Formel für die Gesamtdrehung des Elektronenspins zu finden.

Die Verhältnisse vereinfachen sich wesentlich, wenn das Elektron in der yz -Ebene, also in der Ebene senkrecht zu \mathfrak{S} , emittiert wird. Dann fällt die Richtung von $[\mathbf{v} \mathfrak{E}]$ und damit auch die von \mathfrak{S}' stets mit der von \mathfrak{S} (x -Richtung) zusammen, die Präzessionsbewegung vollzieht sich um eine raumfeste Achse. Dies äußert sich auch in den Formeln für $\bar{\Psi} \sigma \Psi$, die sich im vorliegenden Spezialfall $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vereinfachen zu

$$(50) \quad \begin{cases} M_x = M_x^0 \cdot \{(F_1 - G_1)^2 + (F_2 - G_2)^2 + (F_3 - G_3)^2 + (F_4 - G_4)^2\}, \\ M_y = M_y^0 \{-(F_1 - G_1)^2 + (F_2 - G_2)^2 - (F_3 - G_3)^2 + (F_4 - G_4)^2\} \\ \quad - 2 M_x^0 \{(F_1 - G_1)(F_2 - G_2) + (F_3 - G_3)(F_4 - G_4)\}, \\ M_z = M_z^0 \{-(F_1 - G_1)^2 + (F_2 - G_2)^2 - (F_3 - G_3)^2 - (F_4 - G_4)^2\} \\ \quad + 2 M_y^0 \{(F_1 - G_1)(F_2 - G_2) - (F_3 - G_3)(F_4 - G_4)\}, \end{cases}$$

wobei die Vektoren M^0 und M die magnetischen Momente vor und nach dem Emissionsprozeß bedeuten und die F_i und G_i durch (28) gegeben werden. Der Ausdruck in den geschweiften Klammern von M_x ist gleich $\bar{\Psi} \gamma_4 \Psi$, er wird dadurch bedingt, daß die Wellenfunktionen (2) des Photoelektrons nicht normiert sind. Die Formeln (50) besagen demnach, daß die x -Komponente des magnetischen Momentes beim Emissionsprozeß konstant bleibt, während sich die y - und z -Komponenten ändern. [Daß die beiden letzten Gleichungen von (50) keiner reinen Drehung entsprechen, hat seinen Grund darin, daß die Komponente des Momentes in der Bewegungsrichtung eine Lorentz-dilatation um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ erleidet.] Steht demnach im Ausgangszustand der Spin parallel zur Schwingungsrichtung des magnetischen Vektors, so erfährt er bei Emission des Elektrons in der Richtung senkrecht dazu keine Drehung.

Die Beantwortung der Frage, ob die Orientierung des Spins im Grundzustand einen Einfluß auf die Intensitätsverteilung und damit auf den Absorptionskoeffizienten besitzt, wurde bereits im 3. Kapitel durch die Formeln (29) und (34) gegeben. Wie schon in I gezeigt wurde, äußert sich dieser Einfluß nur im Glied mit M [vgl. (10) und (11)]. Diese Größe M verschwindet streng in nichtrelativistischer Näherung, was ohne weiteres verständlich wird, wenn man sich die Größenverhältnisse der an der Ladung des Elektrons einerseits und am magnetischen Moment andererseits angreifenden Kräfte klar macht. Erstere werden durch die Lorentzkraft

$$\mathfrak{R}_1 = e \cdot \frac{\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathfrak{H}] \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

gegeben, letztere wegen der Inhomogenität des Feldes durch

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial z} \quad \text{bedingt; ihr Verhältnis ist von der Größenordnung } \frac{h\nu}{mc^2}, \text{ daher ist in nichtrelativistischer Näherung noch}$$

kein Einfluß von \mathfrak{R}_2 auf die Intensitätsverteilung zu erwarten.

Im anderen Grenzfall, also bei hohen Geschwindigkeiten des Photoelektrons verschwindet M zwar nach (29) ebenfalls, doch nur in erster Näherung bei der Entwicklung nach n ; die Entwicklung des nächsten Reihengliedes führt bereits auf einen von Null verschiedenen Wert von M . In diesem Grenzfall bewirkt somit die Lichtwelle nicht nur eine Drehung des Elektronenspins, sondern eine, wenn auch im allgemeinen kleine Ablenkung aus seiner durch die Lorentzkräfte bestimmten Bahn.

Zusammenfassung

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verfs. wird das Problem des Photoeffektes in der *K*-Schale nach der relativistischen Theorie Diracs behandelt und für die beiden Grenzfälle $v \sim c$ und $v^2 \ll c^2$ näherungsweise gelöst.

Die Richtungsverteilung der Photoelektronen wird im wesentlichen durch den schon bei nichtrelativistischer Rechnung auftretenden Ausdruck

$$J \sim \frac{\text{const.}}{r^2} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \vartheta)^4}$$

gegeben, die relativistischen Zusatzglieder bewirken nur eine geringe Veränderung dieser Verteilung.

Will man den Absorptionskoeffizienten in der K -Schale durch ein λ^n -Gesetz angenähert darstellen, so muß man n mit kleiner werdender Wellenlänge langsam abnehmen lassen und zwar so, daß n an der Absorptionskante den Wert 4 annimmt, während es im Grenzfall $\lambda \ll \lambda_e$ den Wert $n = 1$ erreicht. Außerdem geht τ_K bis auf die Nähe der Kante, in der ein Z^n -Gesetz gilt, mit der fünften Potenz der Ordnungszahl des bestrahlten Atoms.

Ein Einfluß des elektromagnetischen Wechselfeldes der Lichtwelle auf das magnetische Moment des Elektrons, sei es in einer Drehung der Spinorientierung, sei es in einer ablenkenden Wirkung auf das Elektron und damit in einer Veränderung der Intensitätsverteilung, äußert sich erst in Gliedern von relativistischer Größenordnung. Im behandelten Grenzfall $\beta \sim 1$ dreht sich die Richtung des magnetischen Momentes bis auf einen Spezialfall in einer Weise, die ein allgemeines Gesetz nicht erkennen läßt.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Professor W. Heisenberg bestens danken für sein Interesse an der Durchführung dieser Untersuchungen, sowie für viele fördernde Diskussionen.

Ferner bin ich der Österreichisch-Deutschen Wissenschaftshilfe für die Gewährung eines Stipendiums zu großem Dank verpflichtet.

Leipzig, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 20. Juli 1931)

**Über die retardierten Matrixelemente
in der Theorie der Streuung und Absorption
von Röntgenstrahlen**

Von Johann Fischer

§ 1. Für die sogenannten „unperiodischen“ Atomvorgänge, zu welchen man den *Elektronenstoß*, den *Photoeffekt*, den *Comptoneffekt* u. a. m. zählt und die mit Hilfe der quantenmechanischen Störungsrechnung behandelt werden, ist es charakteristisch, daß die Störungsfunktion einen *Retardierungsfaktor* enthält, der beim Comptoneffekt die Gestalt hat¹⁾: $e^{i|\Delta \mathbf{r}|x}$, wo x die Richtung des Vektors $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ist, $\left(\mathbf{r}_1 = \frac{2\pi\nu}{c} \mathbf{n}_r, \nu_r, \nu_s = \text{Frequenz der primären bzw. gestreuten Lichtwelle, } \mathbf{n}_r = \text{Einheitsvektor in der Richtung der Wellennormale}\right)$. Beim Photoeffekt ist der Retardierungsfaktor von der Form²⁾: $e^{-i|\mathbf{r}|x}$, wo $\mathbf{r} = \frac{2\pi\nu}{c} \mathbf{n}$, ν die Frequenz der eingestrahlten Welle und x die Strahlrichtung ist. Sollen die für diese Probleme maßgebenden Matrixintegrale berechnet werden und wird das Problem wie üblich in Polarkoordinaten angesetzt, so stößt man im allgemeinen auf eine erhebliche Schwierigkeit, die sich darin äußert, daß man die gestörte Eigenfunktion in Form einer *unendlichen Summe* erhält, die nicht leicht auszuwerten ist.³⁾ Der Grund dafür ist der, daß man für die Azimutalquantenzahl keine „Auswahlregel“ bekommt, weil der Integrand im Matrixintegral auch

1) Vgl. G. Wentzel, *Ztschr. f. Phys.* 58. S. 348. 1929, weiterhin mit a. a. O. zitiert.

2) Vgl. G. Wentzel, *Phys. Ztschr.* 29. S. 329. 1928.

3) Nach Fertigstellung dieser Arbeit ist eine Arbeit von F. Sauter (*Ann. d. Phys.* 9. S. 217. 1931) erschienen, in der diese Summation für den Photoeffekt an *K*- und *L*-Elektronen durchgeführt ist.

exponentiell, eben vermittle des Retardierungsfaktors $e^{i|\Delta \mathbf{r}|r \cos \vartheta}$ von dem Azimut ϑ abhängt. Beschränkt man sich auf lange Wellen, d. h. nimmt man an, daß λ groß ist gegen den Atomradius, so kann man den in Frage stehenden Exponentialfaktor nach Potenzen von x/λ entwickeln und das Matrixelement durch Fortlassung von höheren Gliedern der Reihenentwicklung approximativ berechnen.¹⁾ Indessen ist es G. Wentzel zum erstenmal gelungen, solche Ausdrücke für das H-Atom exakt zu berechnen, indem er das Problem in *parabolischen* Koordinaten angesetzt hat, demzufolge die oben erwähnte unendliche Summe durch ein unendliches *Integral* ersetzt wird, welches man in der Regel leicht auswerten kann. So wurde von Wentzel²⁾ der Comptoneffekt am Wasserstoffatom im Grundzustand behandelt.³⁾

Die Aufgabe, die wir uns in der vorliegenden Arbeit stellen, besteht nun darin, daß wir die oben erwähnten Rechnungen von Wentzel zu erweitern versuchen werden, indem wir die genannten Matrixintegrale für das H-Atom *allgemein*, d. h. für einen beliebigen Anfangszustand berechnen.

Wir werden einerseits den für den Comptoneffekt maßgebenden Ausdruck herleiten und ihn zur Ableitung der Richtungsverteilung der Rückstoßelektronen aus der *L-Schale* anwenden, andererseits wollen wir noch den etwas komplizierteren Ausdruck behandeln, der für den Photoeffekt maßgebend ist.

I. Comptoneffekt

§ 2. Wie schon früher betont wurde, beruht die von Wentzel gegebene mathematische Behandlung dieser Probleme darauf, daß man sie in parabolischen Koordinaten ansetzt. Wir definieren diese wie folgt:

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = (\xi \eta)^{1/2} \cdot \cos \varphi, \quad z = (\xi \eta)^{1/2} \cdot \sin \varphi,$$

ferner ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

1) Vgl. A. Sommerfeld u. G. Schur, Ann. d. Phys. 4. S. 409. 1930.

2) G. Wentzel, a. a. O.

3) Nach demselben Verfahren wurde vom Verf. (Ann. d. Phys. 8. S. 821. 1931) der Photoeffekt in der *K-* und *L-Schale* behandelt.

und das Raumelement in parabolischen Koordinaten:

$$dS = \frac{1}{4}(\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi.$$

Das für den Comptoneffekt maßgebende Matricelement hat dann die Gestalt¹⁾:

$$(1) \quad e_{n_1 n_2 \mu_0, \kappa m \mu} = \int dS e^{i|A| \frac{\xi - \eta}{2}} \psi_{n_1 n_2 \mu_0} \psi_{\kappa m \mu},$$

wo $\psi_{n_1 n_2 \mu_0}$ die in parabolischen Koordinaten geschriebene Eigenfunktion des Anfangszustandes und $\psi_{\kappa m \mu}$ die Eigenfunktion eines Zustandes im kontinuierlichen Eigenwertspektrum ist.

Für die Schwingung im diskreten Spektrum haben wir nach Schrödinger²⁾:

$$(2) \quad \begin{cases} \psi_{n_1 n_2 \mu_0} = N_{n_1 n_2 \mu_0} (\xi \eta)^{\frac{\mu_0}{2}} e^{-\frac{Z\alpha}{2n_0}(\xi + \eta)} \\ \cdot L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \xi \right) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \eta \right) \cos \mu_0 \varphi, \end{cases}$$

wo Z die Kernladungszahl³⁾, α den reziproken Bohrschen Wasserstoffradius $\alpha = \frac{4\pi m c^2}{h^2}$ bedeutet; n_0 ist die Hauptquantenzahl des Anfang-Grundzustandes, n_1, n_2 sind die beiden parabolischen Quantenzahlen und μ_0 ist die magnetische Quantenzahl, wobei

$$n_0 = n_1 + n_2 + \mu_0 + 1$$

ist. Die Ausdrücke $L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \xi \right)$ und $L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \eta \right)$ sind μ_0 -te Ableitungen des $\mu_0 + n_1$ -ten bzw. $\mu_0 + n_2$ -ten Laguerreschen Polynoms nach dem Argument $\frac{Z\alpha}{n_0} \xi$ bzw. $\frac{Z\alpha}{n_0} \eta$. $N_{n_1 n_2 \mu_0}$ ist die Normierungskonstante, deren Wert uns vorläufig nicht interessiert. — Die kontinuierliche Eigenfunktion $\psi_{\kappa m \mu}$ lautet in Integraldarstellung:

1) Vgl. G. Wentzel, a. a. O. S. 351 u. 360.

2) Vgl. E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 80. S. 464. 1926.

3) Wegen größerer Allgemeinheit behandeln wir ein wasserstoffähnliches Atomfeld mit der Kernladung Ze .

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{\kappa m \mu} = C_{\kappa m \mu} \frac{\xi^{\mu/2}}{2\pi i} \oint dz' e^{i\kappa \xi z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n+m)} \\ \cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n+m)} \\ \cdot \frac{\eta^{\mu/2}}{2\pi i} \oint dz'' e^{i\kappa \eta z''} \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n-m)} \\ \cdot \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n-m)} \cdot \frac{\cos \mu \varphi}{\sin \mu \varphi} \end{aligned} \right.$$

Hier sind κ, m kontinuierliche Parameter, wobei $\kappa^2 = \frac{8\pi^2 m W^1}{h^2}$ [W = Energieparameter im kontinuierlichen Bereich] ist und $n = \frac{Z\alpha}{2\kappa}$. μ ist die magnetische Quantenzahl. Die Integration wird in der komplexen z' - bzw. z'' -Ebene in einer einfachen Schleife um die Verzweigungspunkte $\pm \frac{1}{2}$ geführt. μ durchläuft die Werte $0, 1, 2, \dots$. Der kontinuierliche Parameter m durchläuft den Bereich $[-\infty \dots +\infty]$, während κ auf den Bereich $[0 \dots +\infty]$ beschränkt bleibt, weil eine Vorzeichenänderung von κ einer solchen von m entspricht.

Die Normierungskonstante $C_{\kappa m \mu}$ hat den Wert²⁾:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{\kappa m \mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{-3/2} e^{\pi n} \kappa^{1+\mu} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + i(n+m)\right) \right| \\ &\cdot \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2} + i(n-m)\right) \right| \quad \text{für } \mu \neq 0, \\ C_{\kappa m 0} &= \frac{1}{2} \pi^{-3/2} e^{\pi n} \kappa \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i(n+m)\right) \right| \\ &\cdot \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i(n-m)\right) \right| \quad \text{für } \mu = 0. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist die komplexe Γ -Funktion definiert gemäß³⁾:

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2\pi i \sin \pi x} \int_L (-t)^{x-1} e^{-t} dt,$$

der Integrationsweg L läuft von $+\infty$ im positiven Sinne um den Nullpunkt herum und zurück nach $+\infty$.

1) Hier bedeutet m selbstverständlich die Masse des Elektrons und soll mit dem Parameter m nicht verwechselt werden.

2) Vgl. G. Wentzel, a. a. O., S. 359 u. J. Fischer, Ann. d. Phys. 8. S. 825. 1931.

3) Vgl. E. T. Whittaker u. G. N. Watson, Modern Analysis, S. 245.

§ 3. Wir wenden uns jetzt zur Berechnung des Matrixelementes (1):

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{n_1 n_2 \mu_0, \kappa m \mu} &= \frac{N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu}}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi + \eta) (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu_0 + \mu)} \\ &\cdot e^{i|\Delta t| \left[\frac{\xi - \eta}{2} e^{-\frac{Z\alpha}{2n_0}(\xi + \eta)} L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \xi \right) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \eta \right) \right.} \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz' e^{i\kappa \xi z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n+m)} \\ &\cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n+m)} \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' e^{i\kappa \eta z''} \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n-m)} \\ &\cdot \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n-m)} \\ &\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \mu_0 \varphi}{\sin \mu_0 \varphi} \frac{\cos \mu \varphi}{\sin \mu \varphi}. \end{aligned} \right.$$

Das Integral über φ verschwindet für alle μ außer für $\mu = \mu_0$ mit dem \cos , wenn die Grundschiwingung proportional $\cos \mu_0 \varphi$ ist, bzw. mit dem \sin wenn letztere proportional $\sin \mu_0 \varphi$ ist. Nach Ausführung der Integration über φ geht ε über in:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n_1 n_2 \mu_0, \kappa m \mu_0} &= \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu_0}}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi + \eta) (\xi \eta)^{\mu_0} \\ &\cdot e^{\frac{i}{2}|\Delta t| \left[(\xi - \eta) e^{-\frac{Z\alpha}{2n_0}(\xi + \eta)} L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \xi \right) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \eta \right) \right.} \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz' e^{i\kappa \xi z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ &\cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' e^{i\kappa \eta z''} \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ &\cdot \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}. \end{aligned}$$

Wir setzen $\frac{Z\alpha}{2n_0} = x_0$ und machen die Substitution:

$$2x_0\xi \rightarrow \xi, \quad 2x_0\eta \rightarrow \eta.$$

Dann sind unsere neuen Koordinaten ξ, η folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4\kappa_0} (\xi - \eta), & y &= \frac{1}{2\kappa_0} \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \\ z &= \frac{1}{2\kappa_0} \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, & r &= \frac{1}{4\kappa_0} (\xi + \eta). \end{aligned}$$

Nach Ausführung der Substitution wird ε , wenn wir noch $\frac{|\Delta t|}{4\kappa_0} = \omega$ setzen und ϱ den Wert $1/2$ hat:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\pi N_{n_1 n_2} \mu_0 C_{n m} \mu_0}{4 (2\kappa_0)^2 \mu_0 + 8} \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{i\omega(\xi-\eta)} e^{-\varrho(\xi+\eta)} (\xi\eta)^{\mu_0} L_{\mu_0+n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0+n_2}^{\mu_0}(\eta) \right. \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz' e^{\frac{i\kappa}{2\kappa_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ &\quad \cdot \left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' e^{\frac{i\kappa}{2\kappa_0} z''} \left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ &\quad \cdot \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \Big\}_{\varrho=1/2}. \end{aligned} \right.$$

Wir vertauschen jetzt die Integrationsreihenfolge über ξ, η bzw. z', z'' und führen zuerst die Integration über ξ und η aus. Zu diesem Zwecke benützen wir für die Ausdrücke $L_{\mu_0+n_1}^{\mu_0}(\xi)$ und $L_{\mu_0+n_2}^{\mu_0}(\eta)$ ihre Darstellung durch die sogenannte „erzeugende Funktion“. Die Laguerreschen Polynome erscheinen nämlich als Entwicklungskoeffizienten, wenn man die Funktion

$$\frac{e^{-\frac{x t}{1-t}}}{1-t}$$

nach Potenzen der Variablen t entwickelt.¹⁾ Es ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k(x) \frac{t^k}{k!} = \frac{e^{-\frac{x t}{1-t}}}{1-t}$$

1) Vgl. Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik. S. 78.

und daraus das k -te Laguerresche Polynom:

$$L_k(x) = \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{e^{-\frac{x t}{1-t}}}{1-t} \right)_{t=0}.$$

Ersetzen wir hier x durch ξ , k durch $\mu_0 + n_1$ und differenzieren wir μ_0 -mal nach ξ , dann erhalten wir für unseren Ausdruck:

$$7) \quad L_{\mu_0+n_1}^{\mu_0}(\xi) = (-1)^{\mu_0} \left(\frac{\partial^{\mu_0+n_1}}{\partial t^{\mu_0+n_1}} \frac{t^{\mu_0} e^{-\frac{\xi t}{1-t}}}{(1-t)^{\mu_0+1}} \right)_{t=0}$$

und analog:

$$7') \quad L_{\mu_0+n_2}^{\mu_0}(\eta) = (-1)^{\mu_0} \left(\frac{\partial^{\mu_0+n_2}}{\partial s^{\mu_0+n_2}} \frac{s^{\mu_0} e^{-\frac{\eta s}{1-s}}}{(1-s)^{\mu_0+1}} \right)_{s=0}.$$

Für die Normierungskonstante $N_{n_1 n_2 \mu_0}$ der diskreten Eigenfunktionen finden wir:

$$(8) \quad \begin{cases} N_{n_1 n_2 \mu_0} = \left(\frac{2 (Z \alpha)^{2\mu_0+3}}{\pi n_0^{2\mu_0+4}} \cdot \frac{n_1! n_2!}{[(\mu_0+n_1)! (\mu_0+n_2)!]^3} \right)^{1/2} \text{ für } \mu_0 \neq 0, \\ N_{n_1 n_2 0} = \frac{(Z \alpha)^{3/2}}{\pi^{1/2} n_0^3 n_1! n_2!} \text{ für } \mu_0 = 0. \end{cases}$$

Die so erhaltenen Werte für $L_{\mu_0+n_1}^{\mu_0}(\xi)$ und $L_{\mu_0+n_2}^{\mu_0}(\eta)$ in (6) eingesetzt liefern schließlich für das Matricelement den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & - \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{x m \mu_0}}{4 (2 \kappa_0)^{2\mu_0+3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial^{\mu_0+n_1}}{\partial t^{\mu_0+n_1}} \frac{\partial^{\mu_0+n_2}}{\partial s^{\mu_0+n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0+1} (1-s)^{\mu_0+1}} \right. \\ & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz' \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \cdot \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \\ & \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-\left[e + \frac{t}{1-t} - i \left(\frac{\kappa z'}{2 \kappa_0} + \omega \right) \right] \xi} \\ & \quad \cdot e^{-\left[e + \frac{s}{1-s} - i \left(\frac{\kappa z''}{2 \kappa_0} - \omega \right) \right] \eta} (\xi \eta)^{\mu_0} \Bigg\} \Bigg|_{t=s=0}^{t=s=1/2}. \end{aligned}$$

Wir führen jetzt die Integration über ξ und η aus:

$$\varepsilon = -\frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu_0}}{4 (2\kappa_0)^{2\mu_0+3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial^{\mu_0+n_1}}{\partial t^{\mu_0+n_1}} \frac{\partial^{\mu_0+n_2}}{\partial s^{\mu_0+n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0+1} (1-s)^{\mu_0+1}} \right. \\ \cdot \frac{\mu_0!}{2\pi i} \oint dz' \frac{\left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)}}{\left(\varrho + \frac{t}{1+t} - i\left(\frac{\kappa z'}{2\kappa_0} + \omega\right)\right)^{\mu_0+1}} \\ \cdot \frac{\mu_0!}{2\pi i} \oint dz'' \frac{\left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \cdot \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}}{\left(\varrho + \frac{s}{1-s} - i\left(\frac{\kappa z''}{2\kappa_0} - \omega\right)\right)^{\mu_0+1}} \left. \right\}_{\substack{\varrho = 1/2, \\ t=s=0}}$$

oder:

$$\varepsilon = (-1)^{\mu_0} \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu_0}}{8 \kappa_0 \kappa^{2\mu_0+2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial^{\mu_0+n_1}}{\partial t^{\mu_0+n_1}} \frac{\partial^{\mu_0+n_2}}{\partial s^{\mu_0+n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0+1} (1-s)^{\mu_0+1}} \right. \\ \cdot \frac{\mu_0!}{2\pi i} \oint dz' \frac{\left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)}}{(z' - z_1)^{\mu_0+1}} \\ \cdot \frac{\mu_0!}{2\pi i} \oint dz'' \frac{\left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \cdot \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}}{(z'' - z_2)^{\mu_0+1}} \left. \right\}_{\substack{\varrho = 1/2, \\ t=s=0}}$$

wo

$$(9) \quad \begin{cases} z_1 = -\frac{2\kappa_0}{\kappa} \left[\omega + i \left(\varrho + \frac{t}{1-t} \right) \right], \\ z_2 = -\frac{2\kappa_0}{\kappa} \left[-\omega + i \left(\varrho + \frac{s}{1-s} \right) \right]. \end{cases}$$

z_1, z_2 liegen außerhalb der geschlossenen Integrationswege. Durch Anwendung des Residuensatzes wird also schließlich:

$$(10) \quad \left\{ \varepsilon = (-1)^{\mu_0} \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu_0}}{8 \kappa_0 \kappa^{2\mu_0+2}} \right. \\ \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial^{\mu_0+n_1}}{\partial t^{\mu_0+n_1}} \frac{\partial^{\mu_0+n_2}}{\partial s^{\mu_0+n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0+1} (1-s)^{\mu_0+1}} \right. \\ \cdot \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_1^{\mu_0}} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ \cdot \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_2^{\mu_0}} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \left. \right\} \left. \right\}_{\substack{\varrho = 1/2, \\ t=s=0}}.$$

§ 4. Interessieren wir uns nun für die *Richtungsverteilung der Rückstoßelektronen* beim Comptoneffekt, so haben wir nach Wentzel den dafür maßgebenden Ausdruck¹⁾:

$$\sum_{\epsilon} \epsilon \psi_{\kappa \epsilon \mu}$$

zu bilden, oder vielmehr in unserer Schreibweise das Integral:

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d m \epsilon \psi_{\kappa m \mu}.$$

Wir setzen also in den Ausdruck (11), den wir mit ψ bezeichnen wollen, für ϵ und $\psi_{\kappa m \mu}$ aus (10) und (3) ihre Werte ein und erhalten, wenn wir noch den Differentialoperator in (7):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial^{\mu_0 + n_1}}{\partial t^{\mu_0 + n_1}} \frac{\partial^{\mu_0 + n_2}}{\partial s^{\mu_0 + n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0+1} (1-s)^{\mu_0+1}} \right)_{\varrho=1/2, t=s=0}$$

vorläufig mit P abkürzen:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} d m \epsilon \psi_{\kappa m \mu_0} = (-1)^{1+\mu_0} \frac{N_{n_1 n_2 \mu_0} (\xi \eta)^{\mu_0/2} \cos \mu_0 \varphi}{2^{\mu_0 + \mu_0} \kappa_0^{\mu_0+1} \kappa^2 \mu_0 + 2} P \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d m (C_{\kappa m \mu_0})^2 \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_1^{\mu_0}} \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_2^{\mu_0}} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ &\cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ &\cdot \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \\ &\cdot \oint d z' e^{\frac{i \kappa \xi}{2 \kappa_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ &\cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ &\cdot \oint d z'' e^{\frac{i \kappa \eta}{2 \kappa_0} z''} \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ &\cdot \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. G. Wentzel, a. a. O., S. 353.

§ 5. Der Ausdruck in (12):

$$(C_{nm\mu_0})^2 \cdot \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_1^{\mu_0}} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_2^{\mu_0}} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}$$

welcher nach Einsetzen für $(C_{nm\mu_0})^2$ aus (4) in

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \pi^{-3} e^{\pi n} x^{2(1+\mu_0)} \left| \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n+m) \right) \right|^2 \\ & \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_1^{\mu_0}} \cdot \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \left| \Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n-m) \right) \right|^2 \\ & \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_2^{\mu_0}} \cdot \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \end{aligned} \right.$$

übergeht, vereinfacht sich beträchtlich, wenn wir folgende Umformung vornehmen.

Es ist

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_1^{\mu_0}} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ & = \left\{ \left[-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m) \right] \cdot \left[-\frac{3}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m) \right] \dots \right. \\ & \quad \cdot \left[-\frac{\mu_0}{2} + \frac{1}{2} - i(n+m) \right] \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{\mu_0} \\ & \quad + \left[-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m) \right] \dots \left[-\frac{\mu_0}{2} + \frac{3}{2} - i(n+m) \right] \\ & \quad \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m) \right] \left(\frac{\mu_0}{1} \right) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{\mu_0-1} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \\ & \quad + \dots + \left[-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m) \right] \\ & \quad \cdot \left[-\frac{3}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m) \right] \dots \left[-\frac{\mu_0}{2} + \frac{1}{2} + i(n+m) \right] \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{\mu_0} \left. \right\} \\ & \quad \cdot \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m) \right] \cdot \left[-\frac{3}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m) \right] \dots \\
 &\quad \cdot \left[-\frac{\mu_0}{2} + \frac{1}{2} - i(n+m) \right] \\
 &\quad \cdot \left\{ \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{\mu_0} - \binom{\mu_0}{1} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{\mu_0-1} \right. \\
 &\quad \quad \cdot \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) + \dots + (-1)^{\mu_0} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{\mu_0} \Big\} \\
 &\quad \cdot \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)\right)} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\
 &\quad \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)},
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

da nämlich der Ausdruck in der geschweiften Klammer den Wert = 1 hat.

Ähnlich finden wir:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_2^{\mu_0}} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \right. \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)\right)} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\
 &\quad \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Dieses in (13) eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \pi^{-3} e^{2\pi n x^2 (1+\mu_0)} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)\right) \\
 &\quad \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)\right) \\
 &\quad \cdot \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\
 &\quad \cdot \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}.
 \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Formel

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

wird schließlich (13):

$$(16) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{\mu_0} \frac{2 \kappa^2 (1 + \mu_0)}{\pi (1 + (-1)^{\mu_0} e^{-2\pi(n+m)}) (1 + (-1)^{\mu_0} \cdot e^{-2\pi(n-m)})} \\ & \cdot \left(z_1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \end{aligned} \right.$$

Andererseits ziehen wir in (12) die Schleifenintegrale um die Punkte $\pm \frac{1}{2}$ auf die reelle z - bzw. z'' -Achse zusammen, indem wir setzen:

$$(17) \oint dz \dots = (1 + (-1)^{\mu_0} e^{-2\pi(n \pm m)}) \int_{-1/2}^{+1/2} dz \dots$$

Dann wird also Ψ nach (12) und mit Rücksicht auf (13), (16) und (17):

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \Psi &= - \frac{N_{n_1 n_2 \mu_0} (\xi \eta)^{\mu_0/2} \cos \mu_0 \varphi}{2^4 + \mu_0 \kappa_0 \mu_0 + 4 \pi^2} P \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dm \left(z_1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \\ & \cdot \int_{-1/2}^{+1/2} dz' e^{\frac{i \kappa \xi}{2 \kappa_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ & \cdot \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \int_{-1/2}^{+1/2} dz'' e^{\frac{i \kappa \eta}{2 \kappa_0} z''} \left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ & \cdot \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \end{aligned} \right.$$

§ 6. Das dreifache Integral über m, z, z'' vom bekannten Typus¹⁾ berechnen wir, indem wir die Integrationsreihenfolge in m, z' vertauschen und die Substitution:

1) Vgl. G. Wentzel, a. a. O., S. 361.

$$\log \left(-\frac{z'' + \frac{1}{2}}{z'' - \frac{1}{2}} \right) = \tau$$

machen. Dann gelangen wir zu:

$$\begin{aligned} \psi = & - \frac{N_{n_1 n_2 \mu_0} (\xi \eta)^{\mu_0/2} \cos \mu_0 \varphi}{2^4 + \mu_0 \mu_0 + 1 \pi^2} P \\ & \cdot e^{-\frac{\pi i}{2} (\mu_0 - 1)} e^{\pi n} \left[\left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} - i n} \\ & \cdot \left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{2} + i n} \\ & + \frac{1}{2} \int d z' e^{\frac{i \pi \xi}{2 \mu_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} - i n} \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{2} + i n} \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d m \int_{-\infty}^{+\infty} d \tau F(\tau) e^{i m (\bar{\tau} - \tau)}, \end{aligned} \quad (16)$$

wo

$$\begin{aligned} F(\tau) = & e^{\frac{i \pi}{4 \mu_0} \eta \frac{e^\tau - 1}{e^\tau + 1}} \cdot \left(\frac{e^\tau}{(e^\tau + 1)^2} \right)^{\frac{1}{2} (\mu_0 + 1)} \cdot e^{i n \tau}, \\ \bar{\tau} = & \log \left(-\frac{z' + \frac{1}{2}}{z' - \frac{1}{2}} \frac{z_1 + \frac{1}{2}}{z_1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{z_2 - \frac{1}{2}}{z_2 + \frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Das Integral über m und τ ist nach dem Fourierretheorem gleich $2 \pi F(\bar{\tau})$. Die Integration über z' führen wir schließlich „asymptotisch“ für große Werte von ξ aus, da uns nur das Verhalten der Eigenfunktion im Unendlichen interessiert. Wir verzerren in bekannter Weise den Integrationsweg gemäß:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2} + i \infty} - \int_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2} + i \infty},$$

entwickeln den Integranden nach Potenzen von

$$\left(z' + \frac{1}{2} \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(z' - \frac{1}{2} \right)$$

und behalten nur das erste Glied bei. Wir erhalten dann:

$$\psi = - \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\mu_0)} N_{n_1 n_2 \mu_0} (\xi \eta)^{\mu_0/2} \frac{\cos \mu_0 \varphi}{\sin \mu_0 \varphi}}{2^3 + \mu_0 \pi \kappa_0 \mu_0 + 1} P e^{-i \kappa r} e^{\pi n} \Gamma(1 + \mu_0 + 2 i n) \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(z_1 - \frac{1}{2}\right)^{-1-\mu_0-2 i n} \left(z_1 + \frac{1}{2}\right)^{+2 i n} \left(z_2 + \frac{1}{2}\right)^{-1-\mu_0}}{\left[\frac{\kappa}{2 \kappa_0} (\xi + R \eta)\right]^{1+\mu_0+2 i n}} + \dots$$

$$R = \frac{z_1 + \frac{1}{2}}{z_1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{z_2 - \frac{1}{2}}{z_2 + \frac{1}{2}}.$$

Die Punkte repräsentieren die einlaufende Welle (mit $e^{+i \kappa r}$, statt $e^{-i \kappa r}$), die zur angeschriebenen auslaufenden Welle konjugiert komplex ist.

Es ist also, wenn wir R und P ausschreiben:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \psi &= - \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\mu_0)} N_{n_1 n_2 \mu_0} e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(1 + \mu_0 + 2 i n)}{2^3 + \mu_0 \pi \kappa_0 \mu_0 + 1} (\xi \eta)^{\mu_0/2} \frac{\cos \mu_0 \varphi}{\sin \mu_0 \varphi} \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial^{\mu_0 + n_1}}{\partial t^{\mu_0 + n_1}} \frac{\partial^{\mu_0 + n_2}}{\partial s^{\mu_0 + n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0+1} (1-s)^{\mu_0+1}} \right. \\ &\cdot \left. \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right)\right]^{2 i n}}{\left[\frac{\kappa \xi}{2 \kappa_0} \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\kappa \eta}{2 \kappa_0} \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^{1+\mu_0+2 i n}} \right\} + \dots \end{aligned} \right._{t=s=0}$$

Wegen

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{t^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0+1}} \right)_{t=0} = 0 \text{ und } \left(\frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{s^{\mu_0}}{(1-s)^{\mu_0+1}} \right)_{s=0} = 0 \text{ für } k > \mu_0$$

wird schließlich:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \psi &= - \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\mu_0)} N_{n_1 n_2 \mu_0} \Gamma(1 + \mu_0 + 2 i n) e^{-i \kappa r}}{2^3 + \mu_0 \pi \kappa_0 \mu_0 + 1} \cdot \frac{e^{\pi n} (\xi \eta)^{\mu_0/2} (\mu_0 + n_1)! (\mu_0 + n_2)! \cos \mu_0 \varphi}{\sin \mu_0 \varphi} \\ &\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma+\delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right. \\ &\cdot \left. \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right)\right]^{2 i n}}{\left[\frac{\kappa \xi}{2 \kappa_0} \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\kappa \eta}{2 \kappa_0} \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^{1+\mu_0+2 i n}} \right\} + \dots \end{aligned} \right._{t=s=0}$$

Wir wiederholen noch einmal die Bedeutung von z_1, z_2 (9):

$$z_1 = -\frac{2x_0}{\kappa} \left(\omega + i \left(\varrho + \frac{t}{1-t} \right) \right),$$

$$z_2 = -\frac{2x_0}{\kappa} \left(-\omega + i \left(\varrho + \frac{s}{1-s} \right) \right).$$

Es ist also

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{2ix_0}{\kappa} \frac{1}{(1-t)^2} \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{2ix_0}{\kappa} \frac{1}{(1-s)^2} \frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} = -\frac{2ix_0}{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right).$$

Für die Anwendung ist es praktisch, von den parabolischen zu Polarkoordinaten zurückzugehen:

$$\xi = 2x_0 r (1 + \cos \vartheta), \quad \eta = 2x_0 r (1 - \cos \vartheta).$$

Hier stellt ϑ den Winkel zwischen dem Vektor $\Delta \mathbf{f}$ und der Austrittsrichtung des Elektrons dar.

Somit lautet die Endformel:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\mu_0)} N_{n_1 n_2 \mu_0} \Gamma(1 + \mu_0 + 2in) e^{\pi n} e^{-i\kappa r}}{8\pi x_0 r^{1+2in}} \cdot (\mu_0 + n_1)! (\mu_0 + n_2)! \sin^{\mu_0} \vartheta \frac{\cos \mu_0 \varphi}{\sin \mu_0 \varphi} \\ & \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma+\delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right. \\ & \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2in}}{\left[\kappa (1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]} \left. + \dots \right. \\ & \left. + \kappa (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{1+\mu_0+2in} \right\}_{\substack{\varrho = 1/2, \\ t=s=0}} \end{aligned} \right.$$

Der Wert der Normierungskonstante $N_{n_1 n_2 \mu_0}$ ist auf S. 495, Gl. (8) gegeben.

§ 7. Als Beispiel für die Anwendung der abgeleiteten Formel (21) berechnen wir jetzt die *Richtungsverteilung der Rückstoßelektronen* aus der *L-Schale*. Für die Anfangszustände haben wir hier die vier Eigenschwingungen:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{100} = N_{100} e^{-\frac{Z\alpha}{4}(\xi + \eta)} \left(1 - \frac{Z\alpha}{2}\xi\right), \\ \psi_{010} = N_{010} e^{-\frac{Z\alpha}{4}(\xi + \eta)} \left(1 - \frac{Z\alpha}{2}\eta\right), \\ \psi'_{001} = N_{001} e^{-\frac{Z\alpha}{4}(\xi + \eta)} (\xi\eta)^{1/2} \cos \varphi, \\ \psi''_{001} = N_{001} e^{-\frac{Z\alpha}{4}(\xi + \eta)} (\xi\eta)^{1/2} \sin \varphi. \end{array} \right.$$

Die Normierungskonstanten haben die Werte (vgl. S. 495):

$$N_{100} = N_{010} = \frac{(Z\alpha)^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}, \quad N_{001} = \frac{(Z\alpha)^{5/2}}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Gemäß (22) bekommen wir für Ψ in Abhängigkeit vom Anfangszustand des Elektrons die vier Funktionen Ψ_{100} , Ψ_{010} , Ψ'_{001} , Ψ''_{001} (wir beschränken uns stets nur auf die auslaufende Welle), wofür wir, wenn wir noch ebenso wie Wentzel¹⁾ annehmen, daß die Energie der Rückstoßelektronen groß gegen die Ablösungsarbeit ist, also:

$$x^2 \gg (Z\alpha)^2, \quad n^2 \ll 1$$

erhalten:

$$\begin{aligned} \Psi_{100} &= -\frac{i(Z\alpha)^{3/2}}{32\pi^{3/2}x_0x} \cdot \frac{e^{-i\pi r}}{r} \left(1 - \frac{2ix_0}{x} \frac{\partial}{\partial z_1}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)} + \dots \\ \Psi_{010} &= -\frac{i(Z\alpha)^{3/2}}{32\pi^{3/2}x_0x} \cdot \frac{e^{-i\pi r}}{r} \left(1 - \frac{2ix_0}{x} \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)} + \dots \\ \Psi'_{001} &= -\frac{(Z\alpha)^{5/2} \sin \vartheta \cos \varphi}{32\sqrt{2}\pi^{3/2}x_0x^2} \cdot \frac{e^{-i\pi r}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left[(1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^2} + \dots \\ \Psi''_{001} &= -\frac{(Z\alpha)^{5/2} \sin \vartheta \sin \varphi}{32\sqrt{2}\pi^{3/2}x_0x^2} \cdot \frac{e^{-i\pi r}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left[(1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 - \frac{1}{2}\right)\right]^2} + \dots \end{aligned}$$

1) Vgl. G. Wentzel, a. a. O., S. 362.

was nach Ausführung der angedeuteten Differentiationen übergeht in:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \psi_{100} &= \frac{i(Z\alpha)^{5/2} \kappa}{4\pi^{3/2}} \cdot \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \\ &\quad \cdot \frac{\left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + 2\kappa |\Delta \mathbf{f}| \cos \vartheta - \frac{3}{4} Z^2 \alpha^2 \right) - 2iZ\alpha(|\Delta \mathbf{f}| + \kappa \cos \vartheta)}{\left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{4} + 2\kappa |\Delta \mathbf{f}| \cos \vartheta \right)^3} + \dots \\ \psi_{010} &= \frac{i(Z\alpha)^{5/2} \kappa}{4\pi^{3/2}} \cdot \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \\ &\quad \cdot \frac{\left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + 2\kappa |\Delta \mathbf{f}| \cos \vartheta - \frac{3}{4} Z^2 \alpha^2 \right) + 2iZ\alpha(|\Delta \mathbf{f}| + \kappa \cos \vartheta)}{\left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{4} + 2\kappa |\Delta \mathbf{f}| \cos \vartheta \right)^3} + \dots \\ \psi'_{001} &= -\frac{(Z\alpha)^{7/2} \kappa^2}{\sqrt{2} \pi^{3/2}} \cdot \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \\ &\quad \cdot \frac{\sin \vartheta \cos \varphi}{\left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{4} + 2\kappa |\Delta \mathbf{f}| \cos \vartheta \right)^3} + \dots \\ \psi''_{001} &= -\frac{(Z\alpha)^{7/2} \kappa^2}{\sqrt{2} \pi^{3/2}} \cdot \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \\ &\quad \cdot \frac{\sin \vartheta \sin \varphi}{\left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{4} + 2\kappa |\Delta \mathbf{f}| \cos \vartheta \right)^3} + \dots \end{aligned} \right.$$

Wir bilden jetzt die Amplitudenquadrate (Wahrscheinlichkeitsdichten) und erhalten somit für die Verteilungsfunktion:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} J(\vartheta, \varphi) &= \psi_{100} \psi_{100}^* + \psi_{010} \psi_{010}^* + \psi'_{001} \psi_{001}^* + \psi''_{001} \psi_{001}^* \\ &\quad - 4\kappa^2 |\Delta \mathbf{f}|^2 \cos^2 \vartheta + 4\kappa |\Delta \mathbf{f}| \left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + \frac{5}{4} Z^2 \alpha^2 \right) \cos \vartheta \\ &= \frac{(Z\alpha)^5 \kappa^2}{8\pi^3} \cdot \frac{(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2)^2 + \frac{5}{2} Z^2 \alpha^2 (\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2) \frac{9}{16} Z^4 \alpha^4}{\left(\kappa^2 + |\Delta \mathbf{f}|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{4} + 2\kappa |\Delta \mathbf{f}| \cos \vartheta \right)^6} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \right.$$

Dieses Resultat unterscheidet sich nicht sehr wesentlich von demjenigen, das Wentzel¹⁾ für die K-Elektronen erhalten und diskutiert hat. Nach Bethe²⁾ beschreiben dieselben Formeln auch die Richtungsverteilung gestreuter Kathodenstrahlen hoher Geschwindigkeit.

1) Vgl. G. Wentzel, a. a. O., S. 362.

2) Vgl. H. Bethe, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 325. 1930.

II. Photoeffekt

§ 8. In zweiter Linie wollen wir nun auch die allgemeine Formel für die Funktion, welche für den Photoeffekt maßgebend ist, herleiten.

Das in Betracht kommende Matricelement ist¹⁾:

$$\varepsilon_i = \int dS e^{-2\pi i \frac{x}{\lambda}} \tilde{\psi}_{W1} \frac{\partial \psi_n}{\partial y}$$

und in parabolischen Koordinaten angesetzt:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{n_1 n_2 \mu_0, \kappa m \mu} &= \int dS e^{-\pi i \frac{r}{c} (\xi - \eta)} \\ &\cdot \tilde{\psi}_{\kappa m \mu} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi_{n_1 n_2 \mu_0} \end{aligned} \right.$$

wo ν die Frequenz der eingestrahlten Welle, x die Strahlrichtung und y die Richtung des elektrischen Vektors der polarisierten Welle ist. Die partiellen Ableitungen der Koordinaten ξ, η, φ nach y ergeben sich zu:

$$(26) \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{2(\xi \eta)^{1/2}}{\xi + \eta} \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -(\xi \eta)^{-1/2} \sin \varphi.$$

Wenn wir für $\psi_{n_1 n_2 \mu_0}$ und $\psi_{\kappa m \mu}$ die Ausdrücke (2) und (3) einsetzen, wird mit Rücksicht auf (26):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n_1 n_2 \mu_0, \kappa m \mu} &= \frac{N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu}}{4} \left\{ 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(1+\mu)} e^{-\pi i \frac{r}{c} (\xi - \eta)} \right. \\ &\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left[e^{-\frac{Z\alpha}{2n_0} (\xi + \eta)} (\xi \eta)^{\mu_0/2} L_{\mu_0+n_1}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \xi \right) L_{\mu_0+n_2}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \eta \right) \right] \\ &\cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cos_{\sin} \mu_0 \varphi \cos_{\sin} \mu \varphi \cos \varphi - \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi + \eta) (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu + \mu_0 - 1)} \\ &\cdot e^{-\pi i \frac{r}{c} (\xi - \eta)} e^{-\frac{Z\alpha}{2n_0} (\xi + \eta)} L_{\mu_0+n_1}^{\mu_0} \left(\frac{Z\alpha}{n_0} \xi \right) L_{\mu_0+n_2}^{\mu_0} \frac{Z\alpha}{n_0} \\ &\cdot \left. \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \cos_{\sin} \mu \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos_{\sin} \mu_0 \varphi \right\} \end{aligned}$$

1) Vgl. G. Wentzel, Phys. Ztschr. 29. S. 331. 1928.

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint d z' e^{i \kappa \xi z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n+m)} \\ & \cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint d z'' e^{i \kappa \eta z''} \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n-m)} \\ & \cdot \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n-m)}. \end{aligned}$$

Wir setzen wiederum: $\frac{Z\alpha}{2n_0} = \kappa_0$, $\frac{\pi}{2\kappa_0} = \omega$, substituieren:
 $2\kappa_0 \xi \rightarrow \xi$, $2\kappa_0 \eta \rightarrow \eta$ und führen den Parameter $\varrho (= 1/2)$ ein,
 dann kommt:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{N_{n_1 n_2} C_{n m \mu}}{4(2\kappa_0)^{\mu + \mu_0 + 2}} \left\{ 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu + 1)} e^{-i\omega(\xi - \eta)} \right. \\ & \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) [e^{-e(\xi + \eta)} (\xi \eta)^{\mu_0/2} L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta)] \\ & \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \cos \mu_0 \varphi \cos \mu \varphi \\ & - \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi + \eta) (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu + \mu_0 - 1)} e^{-i\omega(\xi - \eta)} e^{-e(\xi + \eta)} \\ & \cdot L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta) \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \cos \mu \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \mu_0 \varphi \left. \right\} \\ & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint d z' e^{i \kappa \xi z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n+m)} \\ & \cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint d z'' e^{i \kappa \eta z''} \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n-m)} \\ & \cdot \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n-m)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Wir führen jetzt die angedeuteten Ableitungen nach ξ , η und φ aus und gelangen durch geeignete Zusammenfassung zum Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \frac{N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu}}{4 (2 \kappa_0)^\mu + \mu_0 + 2} \left\{ -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-i\omega(\xi - \eta)} \right. \\
 & \cdot e^{-\varrho(\xi + \eta)} (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu + \mu_0 - 1)} L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi), L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta) \\
 & \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos}{\sin}(\mu_0 - 1) \varphi \frac{\cos}{\sin} \mu \varphi \\
 & + 2 \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-i\omega(\xi - \eta)} e^{-\varrho(\xi + \eta)} (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu + \mu_0 + 1)} \\
 & \cdot (L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0 + 1}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta) - L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0 + 1}(\eta) \\
 & + L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0 + 1}(\eta)) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \frac{\cos}{\sin} \mu_0 \varphi \frac{\cos}{\sin} \mu \varphi \Big\}_{\varrho = \frac{1}{2}} \\
 & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz' e^{\frac{i\pi\xi}{2\kappa_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n+m)} \\
 & \cdot \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n+m)} \\
 & \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' e^{\frac{i\pi\eta}{2\kappa_0} z''} \left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} - i(n-m)} \\
 & \cdot \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + i(n-m)}.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Das Integral über φ im ersten Glied der geschweiften Klammer verschwindet für alle μ , außer für $\mu = \mu_0 - 1$ mit dem \cos , wenn die Grundschiwingung proportional $\cos \mu_0 \varphi$ ist, bzw. mit dem \sin , wenn letztere proportional $\sin \mu_0 \varphi$ ist. Die „Auswahlregel“ für μ für das zweite Glied der Klammer:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \frac{\cos}{\sin} \mu_0 \varphi \frac{\cos}{\sin} \mu \varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\cos}{\sin}(\mu_0 + 1) \varphi \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\cos}{\sin}(\mu_0 - 1) \varphi \right] \frac{\cos}{\sin} \mu \varphi
 \end{aligned}$$

ergibt sich zu

$$\mu = \mu_0 \pm 1.$$

Das Integral über φ im zweiten Glied ist von 0 verschieden nur wenn $\mu = \mu_0 - 1$ oder $\mu = \mu_0 + 1$ ist, jeweils \cos mit

dem cos, bzw. sin mit sin. Die „gemischten“ Glieder (cos mit sin und umgekehrt) verschwinden für alle μ .

§ 9. Wir berechnen zuerst den Beitrag von $\mu = \mu_0 - 1$. Nach Ausführung der Integration über φ wird:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{n_1 \mu_0, n_2 \mu_0 - 1} &= \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{n_2 m \mu_0 - 1}}{4 (2 \kappa_0)^2 \mu_0 + 1} \\ &\cdot \left\{ -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-i\omega(\xi - \eta)} e^{-\varrho(\xi + \eta)} (\xi \eta)^{\mu_0 - 1} \right. \\ &\cdot L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta) + \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-i\omega(\xi - \eta)} e^{-\varrho(\xi + \eta)} (\xi \eta)^{\mu_0} \\ &\cdot (L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0 + 1}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta) - L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0 + 1}(\eta) \\ &\quad \left. + L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0 + 1}(\eta)) e^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz' e^{\frac{i\kappa\xi}{2\kappa_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ &\quad \cdot \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ &\cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' e^{\frac{i\kappa\eta}{2\kappa_0} z''} \left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ &\quad \cdot \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \end{aligned} \right.$$

Für die Ausdrücke $L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi)$, $L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0 + 1}(\xi)$, $L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta)$, $L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0 + 1}(\eta)$ benutzen wir wie oben (I) die Darstellung vermittle der „erzeugenden Funktion“. Das Matrixelement ε wird dann:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= - \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{n_2 m \mu_0 - 1}}{4 (2 \kappa_0)^2 \mu_0 + 1} \left\{ \mu_0 \frac{\partial^{\mu_0 + n_1}}{\partial t^{\mu_0 + n_1}} \frac{\partial^{\mu_0 + n_2}}{\partial s^{\mu_0 + n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0 + 1} (1-s)^{\mu_0 + 1}} \right. \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-\left(\varrho + \frac{t}{1-t} + i\omega\right)\xi} e^{-\left(\varrho + \frac{s}{1-s} - i\omega\right)\eta} (\xi \eta)^{\mu_0 - 1} \\ &+ \frac{\partial^{\mu_0 + n_1}}{\partial t^{\mu_0 + n_1}} \frac{\partial^{\mu_0 + n_2}}{\partial s^{\mu_0 + n_2}} \left(\frac{t^{\mu_0 + 1} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0 + 2} (1-s)^{\mu_0 + 1}} \right. \\ &\left. \left. + \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1-t)^{\mu_0 + 1} (1-s)^{\mu_0 + 1}} + \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0 + 1}}{(1-t)^{\mu_0 + 1} (1-s)^{\mu_0 + 2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-\left(\varrho + \frac{t}{1-t} + i\omega\right)\xi} e^{-\left(\varrho + \frac{s}{1-s} - i\omega\right)\eta} (\xi\eta)^{\mu_0} \Big\}_{\varrho = 1/2, t=s=0} \\
& \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz' e^{\frac{i\pi\xi}{2\kappa_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\
& \quad \cdot \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\
& \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint dz'' e^{\frac{i\pi\eta}{2\kappa_0} z''} \left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\
& \quad \cdot \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}.
\end{aligned}$$

Der Kürze halber bezeichnen wir die obigen Differentialoperatoren mit P und Q . Dann wird, wenn wir die Integration über ξ und η zuerst ausführen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & - \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{n m \mu_0 - 1}}{4 (2\kappa_0)^{2\mu_0 + 1}} \left\{ \left(\frac{2i\kappa_0}{\pi} \right)^{2\mu_0} P \right. \\
& \cdot \frac{(\mu_0 - 1)!}{2\pi i} \oint dz' \frac{\left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)}}{(z' - z_1)^{\mu_0}} \\
& \cdot \frac{(\mu_0 - 1)!}{2\pi i} \oint dz'' \frac{\left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}}{(z'' - z_2)^{\mu_0}} \\
& + \left(\frac{2i\kappa_0}{\pi} \right)^{2\mu_0 + 2} Q \\
& \cdot \frac{\mu_0!}{2\pi i} \oint dz' \frac{\left(z' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)}}{(z' - z_1)^{\mu_0 + 1}} \\
& \cdot \frac{\mu_0!}{2\pi i} \oint dz'' \frac{\left(z'' - \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \left(z'' + \frac{1}{2}\right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}}{(z'' - z_2)^{\mu_0 + 1}} \Big\}
\end{aligned}$$

WO

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\frac{2\kappa_0}{\pi} \left[-\omega + i \left(\varrho + \frac{t}{1-t} \right) \right], \\
z_2 &= -\frac{2\kappa_0}{\pi} \left[+\omega + i \left(\varrho + \frac{s}{1+s} \right) \right], \\
\varrho &= \frac{1}{2}, \quad t = s = 0.
\end{aligned}$$

Schließlich nach Anwendung des Residuensatzes:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & - \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu_0 - 1}}{4 (2 \kappa_0)^{2 \mu_0 + 1}} \left\{ \left(\frac{2 i \kappa_0}{\kappa} \right)^{2 \mu_0} P \frac{\partial^{\mu_0 - 1}}{\partial z_1^{\mu_0 - 1}} \right. \\ & \cdot \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\ & \cdot \frac{\partial^{\mu_0 - 1}}{\partial z_2^{\mu_0 - 1}} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \\ & + \left(\frac{2 i \kappa_0}{\kappa} \right)^{2 \mu_0 + 2} Q \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_1^{\mu_0}} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ & \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \frac{\partial^{\mu_0}}{\partial z_2^{\mu_0}} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ & \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)} \left. \right\}, \end{aligned}$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon = & (-1)^{\mu_0 - 1} \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu_0 - 1}}{8 \kappa_0 \kappa^{2 \mu_0}} \left\{ P - \left(\frac{2 \kappa_0}{\kappa} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z_1 \partial z_2} Q \right\} \\ & \cdot \frac{\partial^{\mu_0 - 1}}{\partial z_1^{\mu_0 - 1}} \frac{\partial^{\mu_0 - 1}}{\partial z_2^{\mu_0 - 1}} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \\ & \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \\ & \cdot \left(z_2 + \frac{1}{2} \right)^{-1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}. \end{aligned} \right.$$

Für die Richtungsverteilung sowie die Gesamtausbeute der Photoelektronen ist maßgebend die Funktion $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, wo:

$$\Psi_{1,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d m \varepsilon_{\mu_0 \mp 1} \psi_{\kappa m \mu_0 \mp 1} \cdot {}^1)$$

Nach Einsetzen für $\varepsilon_{\mu_0 - 1}$ und $\psi_{\kappa m \mu_0 - 1}$ aus (30) bzw. (3) wird:

1) Näher begründet in der oben (S. 490) erwähnten Arbeit des Verf.s.

$$\begin{aligned}
 \psi_1 = & (-1)^{\mu_0} \frac{N_{n_1 n_2 \mu_0} (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu_0-1)} \cos(\mu_0-1)\varphi}{2^{\frac{1}{2} + \mu_0} \pi \kappa_0^{\mu_0} x^2 \mu_0} \\
 & \cdot \left\{ P - \left(\frac{2 \kappa_0}{\pi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} Q \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} d m (C_{n m \mu_0} - 1)^2 \\
 & \cdot \frac{\xi^{\mu_0-1}}{\partial z_1^{\mu_0-1}} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m) \\
 & \cdot \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m) \frac{\partial^{\mu_0-1}}{\partial z_2^{\mu_0-1}} \\
 & \cdot \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m) \\
 & \cdot \frac{1}{2 \pi i} \oint d z' e^{\frac{i \pi \xi}{2 \kappa_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n+m) \\
 & \cdot \left(z' + \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n+m) \frac{1}{2 \pi i} \oint d z'' e^{\frac{i \pi \eta}{2 \kappa_0} z''} \\
 & \cdot \left(z'' - \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} - i(n-m) \left(z'' + \frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{\mu_0}{2} + i(n-m).
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Das dreifache Integral in (31) ist vom selben Typus, wie das in I behandelte (12), nur steht im letzteren μ_0 statt $\mu_0 - 1$. Wir schreiben also das Resultat sofort hin:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 = & \frac{e^{-\frac{\pi i}{2} \mu_0} N_{n_1 n_2 \mu_0} e^{\pi n} e^{-i \pi r} \Gamma(\mu_0 + 2 i n) (\xi \eta)^{\frac{1}{2}(\mu_0-1)} \cos(\mu_0-1)\varphi}{2^{\mu_0+2} \pi \kappa_0^{\mu_0}} \\
 & \cdot \left\{ P - \left(\frac{2 \kappa_0}{\pi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} Q \right\} \\
 & \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[\frac{\pi \xi}{2 \kappa_0} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi \eta}{2 \kappa_0} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{\mu_0+2 i n}} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

oder wenn wir die durch P und Q abgekürzten Differentialoperatoren ausschreiben:

$$\psi_1 = \frac{e^{-\frac{\pi i}{2} \mu_0} N_{n_1 n_2 \mu_0} e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(\mu_0 + 2 i n) (\xi \eta)^{\frac{1}{2} (\mu_0 - 1)} \cos(\mu_0 - 1) \varphi}{2^{\mu_0 + 2} \pi \kappa_0^{\mu_0}} \cdot \left\{ \mu_0 \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial^{\mu_0 + n_1}}{\partial t^{\mu_0 + n_1}} \frac{\partial^{\mu_0 + n_2}}{\partial s^{\mu_0 + n_2}} \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1 - t)^{\mu_0 + 1} (1 - s)^{\mu_0 + 1}} \right. \\ - \left(\frac{2 \kappa_0}{\kappa} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \frac{\partial^{\mu_0 + n_1}}{\partial t^{\mu_0 + n_1}} \frac{\partial^{\mu_0 + n_2}}{\partial s^{\mu_0 + n_2}} \left(\frac{t^{\mu_0 + 1} s^{\mu_0}}{(1 - t)^{\mu_0 + 2} (1 - s)^{\mu_0 + 1}} \right. \\ \left. \left. + \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0}}{(1 - t)^{\mu_0 + 1} (1 - s)^{\mu_0 + 1}} + \frac{t^{\mu_0} s^{\mu_0 + 1}}{(1 - t)^{\mu_0 + 1} (1 - s)^{\mu_0 + 2}} \right) \right\} \\ \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[\frac{\kappa \xi}{2 \kappa_0} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\kappa \eta}{2 \kappa_0} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{\mu_0 + 2 i n}} \Bigg|_{\varrho = 1/2, t = s = 0} + \dots$$

Dies wird, analog zum ähnlichen Ausdruck in I (20):

$$\psi_1 = \frac{e^{-\frac{\pi i}{2} \mu_0} N_{n_1 n_2 \mu_0} e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \cdot \Gamma(\mu_0 + 2 i n) (\xi \eta)^{\frac{1}{2} (\mu_0 - 1)} \cos(\mu_0 - 1) \varphi}{2^{\mu_0 + 2} \pi \kappa_0^{\mu_0}} (\mu_0 + n_1)! (\mu_0 + n_2)! \\ \cdot \left\{ \mu_0 \frac{\partial}{\partial \varrho} \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma + \delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right. \\ - \left(\frac{2 \kappa_0}{\kappa} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \left(\sum_{\gamma=0}^{n_1-1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0 + 1} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma + \delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right. \\ + \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma + \delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \\ \left. \left. + \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2-1} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0 + 1} \frac{\partial^{\gamma + \delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right) \right\} \\ \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[\frac{\kappa \xi}{2 \kappa_0} \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\kappa \eta}{2 \kappa_0} \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{\mu_0 + 2 i n}} \Bigg|_{\varrho = 1/2, t = s = 0}$$

Wir setzen wiederum für ξ, η : $2 \kappa_0 r (1 + \cos \vartheta)$, bzw. $2 \kappa_0 r (1 - \cos \vartheta)$. Dann wird schließlich:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 = & \frac{e^{-\frac{\pi i}{2} \mu_0} N_{n_1 n_2 \mu_0} e^{\pi n} \Gamma(\mu_0 + 2 i n)! (u_0 + n_1)! (\mu_0 + n_2)!}{8 \pi x_0} \cdot \frac{e^{-i n \tau}}{r^{1+2 i n}} \\
 & \cdot \left[\left\{ \mu_0 \frac{\partial}{\partial \varrho} \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma+\delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right. \right. \\
 & - \left(\frac{2 x_0}{x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \left(\sum_{\gamma=0}^{n_1-1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0 + 1} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma+\delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right. \\
 & + \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma+\delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \\
 & \left. \left. + \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2-1} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0 + 1} \frac{\partial^{\gamma+\delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right\} \right. \\
 & \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[x \left(1 + \cos \vartheta \right) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right.} \\
 & \left. \left. + x \left(1 - \cos \vartheta \right) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right] \mu_0 + 2 i n} \right]_{\varrho=1, s=t=s_0}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

§ 10. Auf ähnliche Weise finden wir den Beitrag von $\mu = \mu_0 + 1$ zu Ψ . Das erste Glied in der geschweiften Klammer in (28) verschwindet in diesem Fall. Das zweite Glied geht nach Einsetzen für $\mu (= \mu_0 + 1)$ und Ausführung der Integration über φ über in:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{n_1 n_2 \mu_0, \kappa m \mu_0 + 1} = & \frac{\pi N_{n_1 n_2 \mu_0} C_{\kappa m \mu_0 + 1}}{4 (2 x_0)^2 \mu_0 + 8} \\
 & \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-i \omega (\xi - \eta)} e^{-\varrho (\xi + \eta)} (\xi \eta)^{\mu_0 + 1} \\
 & \cdot (I_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0 + 1}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0}(\eta) - I_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0 + 1}(\eta) \\
 & + L_{\mu_0 + n_1}^{\mu_0}(\xi) L_{\mu_0 + n_2}^{\mu_0 + 1}(\eta)) \\
 & \cdot \frac{1}{2 \pi i} \oint d z' e^{\frac{i \kappa \xi}{2 x_0} z'} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{\frac{\mu_0}{2} - i(n+m)} \left(z' - \frac{1}{2} \right)^{\frac{\mu_0}{2} + i(n+m)} \\
 & \cdot \frac{1}{2 \pi i} \oint d z'' e^{\frac{i \kappa \eta}{2 x_0} z''} \left(z'' - \frac{1}{2} \right)^{\frac{\mu_0}{2} - i(n-m)} \left(z'' + \frac{1}{2} \right)^{\frac{\mu_0}{2} + i(n-m)}.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Die Rechnungen sind vollkommen analog denen in den früheren Paragraphen, und wir schreiben deshalb nur das Resultat an:

$$\begin{aligned}
 \psi_2 = & - \frac{e^{-\frac{\pi i}{2} \mu_0} N_{n_1 n_2 \mu_0} e^{\pi n} x_0 \Gamma(2 + \mu_0 + 2 i n)}{(\mu_0 + n_1)! (\mu_0 + n_2)! \sin^{\mu_0 + 1} \vartheta \frac{\cos(\mu_0 + 1) \varphi}{\sin(\mu_0 + 1) \varphi}} \cdot \frac{e^{-i \pi r}}{r^{1 + 2 i n}} \\
 & \cdot \left[\sum_{\gamma=0}^{n_1-1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0 + 1} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma + \delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right. \\
 & + \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0} \frac{\partial^{\gamma + \delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \\
 & \left. + \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2-1} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{\mu_0 + n_1 - \gamma}{\mu_0} \binom{\mu_0 + n_2 - \delta}{\mu_0 + 1} \frac{\partial^{\gamma + \delta}}{\partial t^\gamma \partial s^\delta} \right] \\
 & \cdot \frac{\left[\left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[x (1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right.} \\
 & \left. + x (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{2 + \mu_0 + 2 i n}} \Bigg|_{t=s=0}^{t=1/s,}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Die für den Photoeffekt maßgebende Funktion Ψ ist dann die Summe von (33) und (35):

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2.$$

Zu den abgeleiteten Formeln muß noch bemerkt werden, daß sie nur für $\mu_0 \neq 0$ gültig sind. Im Falle $\mu_0 = 0$ multipliziert sich nämlich das Quadrat des Normierungsfaktors $C_{\pi m 0}$ (nach (4)) mit $\frac{1}{2}$. Während dieser Faktor beim Comptoneffekt wieder wegfällt (durch einen Faktor 2 bei der φ -Integration), ergibt sich beim Photoeffekt die Funktion Ψ für $\mu_0 = 0$ (in diesem Fall tritt hier nämlich die Normierungskonstante $C_{\pi m 1}$ auf) gleich dem doppelten des Ausdruckes (35). (33) liefert keinen Beitrag; vgl. (28)).

§ 11. Zur Kontrolle der abgeleiteten allgemeinen Formeln wollen wir die für die Richtungsverteilung der aus der K- und L-Schale austretenden Elektronen, bzw. für den Absorptions-

koeffizienten in diesen Schalen maßgebende Funktionen ψ berechnen und sie mit den speziellen Resultaten der oben erwähnten Arbeit des Verf.s (vgl. S. 490; weiterhin im Text mit A angeführt) vergleichen.

Für die K -Schale ist:

$$n_1 = n_2 = \mu_0 = 0.$$

Einen Beitrag liefert nur Formel (35) mit $\cos \vartheta$:

$$\psi_{000} = - \frac{N_{000} e^{\pi n} \alpha_0 \Gamma(2 + 2in) \sin \vartheta \cos \varphi}{\pi} \cdot \frac{e^{-i\kappa r}}{r^{1+2in}} \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2in}}{\left[\kappa (1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{2+2in}} + \dots$$

wobei wir den durch Einsetzen in (35) gewonnenen Ausdruck nach dem am Schluß des vorigen Paragraphen gesagten noch mit einem Faktor 2 multipliziert haben. Mit dem Wert (8) für N_{000} und mit $\alpha_0 = \frac{Z\alpha}{2}$ wird:

$$\psi_{000} = - \frac{(Z\alpha)^{1/2} \Gamma(2 + 2in) \sin \vartheta \cos \varphi \cdot e^{-i\kappa r} e^{\pi n}}{2\pi^{1/2} r^{1+2in}} \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2in}}{\left[\kappa (1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{2+2in}} + \dots$$

was mit (10) in A vollkommen übereinstimmt, wenn wir dort für ξ und η ihre Werte einsetzen

$$[\xi = r(1 + \cos \vartheta), \quad \eta = r(1 - \cos \vartheta)]$$

und das mit dem Faktor $e^{i\kappa r}$ versehene zweite Glied, welches der einlaufenden Welle entspricht, fortlassen.

Desgleichen finden wir die zur L -Schale gehörigen Funktionen. Dem Umstande entsprechend, daß wir hier mit vier Funktionen, die den Anfangszustand beschreiben, zu tun haben, erhalten wir vier ψ -Funktionen, nämlich ψ_{100} , ψ_{010} , ψ'_{001} , ψ''_{001} in A bezeichnet der Reihe nach durch: ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 .

Nach (35) wird Ψ_{100} , nachdem wir noch mit dem Faktor 2 multipliziert haben (weil $\mu_0 = 0$):

$$\Psi_{100} = - \frac{N_{100} \kappa_0 e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(2 + 2 i n) \sin \vartheta \cos \varphi}{\pi r^{1+2 i n}} \cdot \left[\frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left\{ 2 + \frac{\partial}{\partial t} \right\} \left[\kappa \left(1 + \cos \vartheta \right) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa \left(1 - \cos \vartheta \right) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{2+2 i n}} \right]_{t=0}$$

Es ist nach (8):

$$N_{100} = \frac{(Z\alpha)^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}, \quad \text{ferner } \kappa_0 = \frac{Z\pi}{2n_0} = \frac{Z\alpha}{4} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} = - \frac{2 i \kappa_0}{\kappa} \frac{\partial}{\partial z_1} \quad (\text{vgl. S. 503}).$$

Wenn wir dies berücksichtigen, wird:

$$\Psi_{100} = - \frac{(Z\alpha)^{3/2} e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(2 + 2 i n) \cdot \left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n} \sin \vartheta \cos \varphi}{8 \pi^{3/2} r^{1+2 i n} \left[\kappa \left(1 + \cos \vartheta \right) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) + \kappa \left(1 - \cos \vartheta \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \left(z_3 - \frac{1}{2} \right) \right]^{2+2 i n}} \cdot \left\{ 1 + \frac{i n \left[\kappa \left(1 + \cos \vartheta \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa \left(1 - \cos \vartheta \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right] - n^2 \kappa \left(1 + \cos \vartheta \right) \frac{z_2 + \frac{1}{2}}{z_1 + \frac{1}{2}}}{\kappa \left(1 + \cos \vartheta \right) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa \left(1 - \cos \vartheta \right) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right)} \right\} + \dots$$

Analog ist:

$$\Psi_{010} = - \frac{N_{010} \kappa_0 e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(2 + 2 i n) \sin \vartheta \cos \varphi}{\pi r^{1+2 i n}} \cdot \left\{ 2 + \frac{\partial}{\partial s} \right\}_{s=0} \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[\kappa \left(1 + \cos \vartheta \right) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa \left(1 - \cos \vartheta \right) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{2+2 i n}} + \dots$$

Hier ist:

$$N_{010} = \frac{(Z\alpha)^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{2i\kappa_0}{\kappa} \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Also:

$$\begin{aligned} \psi_{010} = & - \frac{(Z\alpha)^{3/2} e^{\pi n} e^{-i\kappa r} \Gamma(2+2in)}{8\pi^{3/2} \left[\kappa(1+\cos\vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) \right.} \\ & \left. + \kappa(1-\cos\vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_3 - \frac{1}{2}\right) \right]^{2+2in} \cdot r^{1+2in} \\ & \cdot \left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_3 + \frac{1}{2} \right)^{2in} \sin\vartheta \cos\varphi \right. \\ & \left. + i n \left[\kappa(1+\cos\vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) + \kappa(1-\cos\vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \right] \right. \\ & \left. - n^2 \kappa(1-\cos\vartheta) \frac{z_1 + \frac{1}{2}}{z_3 + \frac{1}{2}} \right] \\ & \cdot \left[1 + \frac{\kappa(1+\cos\vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) + \kappa(1-\cos\vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_3 - \frac{1}{2}\right)}{\left[\kappa(1+\cos\vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) \right.} \right. \\ & \left. \left. + \kappa(1-\cos\vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_3 - \frac{1}{2}\right) \right]^{2in}} \right] + \dots \end{aligned}$$

Die zu den beiden Anfangszuständen (001) mit dem \cos bzw. \sin gehörigen Funktionen ψ'_{001} , ψ''_{001} unterscheiden sich wesentlich. Während nämlich zu ψ'_{001} beide Ausdrücke (33), wie auch (35) einen Beitrag liefern, reduziert sich ψ'_{001} wegen $\sin O = 0$ allein auf den Beitrag von (35).

Laut (33) und (35) wird:

$$\begin{aligned} \psi'_{001} = & - \frac{i N_{001} e^{\pi n} e^{-i\kappa r} \Gamma(1+2in)}{8\pi \kappa_0 r^{1+2in}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{2\kappa_0}{\kappa} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} \right\} \\ & \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_3 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2in}}{\left[\kappa(1+\cos\vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) \right.} \\ & \left. + \kappa(1-\cos\vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_3 - \frac{1}{2}\right) \right]^{1+2in}} \end{aligned}$$

$$+ \frac{i N_{001} x_0 e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(3 + 2 i n) \sin^2 \vartheta \cos 2 \varphi}{2 \pi r^{1+2 i n}} \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[\kappa (1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{3+2 i n}} + \dots$$

Nach Ausführung der angedeuteten Differentiationen (mit $\frac{\partial}{\partial \varphi} = -\frac{2 i x_0}{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right)$) und Einsetzen von

$$N_{001} = \frac{(Z \alpha)^{3/2}}{4 \sqrt{2} \pi}$$

und x_0 geht der obige Ausdruck über in:

$$\begin{aligned} \Psi'_{001} = & - \frac{i (Z \alpha)^{3/2} e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(1 + 2 i n) \left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{32 \sqrt{2} \pi^{3/2} r^{1+2 i n} \left[\kappa (1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{3+2 i n}} \\ & \cdot \left\{ 2 (1 + \cos \vartheta)^2 \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \frac{z_1 - \frac{1}{2}}{z_1 + \frac{1}{2}} \right. \\ & + 2 (1 - \cos \vartheta)^2 \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{z_2 - \frac{1}{2}}{z_2 + \frac{1}{2}} \\ & - \sin^2 \vartheta \left[1 + 4 i n - 4 n^2 - 4 z_1 z_2 \right. \\ & \left. \left. + (1 + 2 i n)(2 + 2 i n) \cos 2 \varphi \right] \right\} + \dots \end{aligned}$$

Und schließlich finden wir für die letzte der vier Funktionen:

$$\begin{aligned} \Psi''_{001} = & \frac{i N_{001} x_0 e^{\pi n} e^{-i \kappa r} \Gamma(3 + 2 i n) \sin^2 \vartheta \sin 2 \varphi}{2 \pi r^{1+2 i n}} \cdot \frac{\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2 i n}}{\left[\kappa (1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa (1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{3+2 i n}} + \dots \end{aligned}$$

und wenn wir setzen: $\Gamma(3 + 2in) = (1 + 2in)(2 + 2in)\Gamma(1 + 2in)$, wird:

$$\psi''_{001} = - \frac{i(Z\alpha)^{7/2} e^{in} e^{-i\pi} \Gamma(1 + 2in)}{32\sqrt{2}\pi^{3/2} r^{1+2in} \left[\kappa(1 + \cos\vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \left(z_2 + \frac{1}{2}\right) + \kappa(1 - \cos\vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2}\right) \left(z_2 - \frac{1}{2}\right) \right]^{3+2in} \sin^2\vartheta \sin 2\varphi} \cdot (4n^2 - 2 - 6in) + \dots$$

Die Ausdrücke ψ_{100} , ψ_{010} , ψ'_{001} , ψ''_{001} sind in der Tat identisch mit den entsprechenden in A: ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 .

Zürich, Dezember 1930.

(Eingegangen 31. Juli 1931)

sio.

+

- 61 m

+ ...

Tat